FUNKTIONALE CLUSTER-QUANTENFELDTHEORIE DES NICHTLINEAREN SPINORFELDES

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
MICHAEL HERZOG
aus Madrid

1983

FUNKTIONALE CLUSTER-QUANTENFELDTHEORIE DES NICHTLINEAREN SPINORFELDES

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

MICHAEL HERZOG

aus Neuffen

1999

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547616_0002

FUNKTIONALE CLUSTER-QUANTENFELDTHEORIE DES NICHTLINEAREN SPINORFELDES

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
MICHAEL HERZOG
aus Madrid
1983

Tag der mündlichen Prüfung: 30.6.1983

Dekan : Prof. Dr. A. Fäßler
1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. Stumpf
2. Berichterstatter : Priv.-Doz. Dr. D. Großer

Ich möchte Herrn Prof. Dr. H. Stumpf für die Mühe danken, die er sich beim Durchlesen dieser Arbeit gemacht hat. Herrn Priv.-Doz. Dr. D. Großer danke ich für die Bereitschaft eine so umfangreiche Arbeit zu begutachten.

UNIV. LEIDEN BIBL.

Für meine Familie
als Erinnerung und in Dankbarkeit
an die, die uns zu früh verlassen
haben, als Freude und in Liebe
zu Euch allen

Der naturwissenschaftliche Theoretiker ist nicht zu beneiden. Denn die Natur, oder genauer das Experiment, ist ein unerbittlicher und nicht sehr freundlicher Richter seiner Arbeit. Es sagt niemals „Ja" zu einer Theorie. In den aller allergünstigten Fällen sagt es „Kann sein", und in den meisten Fällen sagt es einfach „Nein". Stimmt ein Experiment mit der Theorie überein, so bedeutet das für die letztere „Kann sein", stimmt es nicht überein, heißt das „Nein". Wahrscheinlich wird jede Theorie eines Tages ihr „Nein" erfahren - die meisten Theorien schon bald nach ihrer Aufstellung.

- A. Einstein -

A b s t r a c t

Herzog, Michael

Funktionale Cluster-Quantenfeldtheorie des nichtlinearen Spinorfeldes

Die Heisenberg-Dürr-Feldgleichungen der nichtlinearen Spinortheorie werden erweitert und Gleichungen mit höheren Operatorprodukten und komplizierten Vertexausdrücken aufgestellt. Es kommt dabei zu einer Veränderung von Propagator und Regularisierungseigenschaften der Pole. Die allgemein relativistische Verallgemeinerung der Heisenberg-Dürr-Gleichungen höherer Produkte in kovarianter Formulierung ermöglicht die Berechnung eines Spektrums von Elementarteilchen mit eingeprägter Länge und einer Masse, die durch die Raumkrümmung verursacht wird und halb so groß ist wie von Dürr berechnet. Die Regularisierungseigenschaften im Propagator sind krümmungsabhängig, und die Kopplungskonstante wird dimensionslos, wodurch die Erweiterung auf eine allgemein relativistische Theorie ermöglicht wird. Die Berechnung des freien Propagators aus einem Gleichungssystem für freie Felder ermöglicht die Aufstellung von Hadron/Geist bzw. Lepton/Quark-Modellen. Die dynamische Gleichung höherer Produkte ermöglicht eine Erweiterung der Theorie. Die Reduktion der Feldgleichung auf den rho- und (rho+2)-Sektor wird erstmalig richtig berechnet. Dadurch können sämtliche Graphen der Theorie auf allen Näherungsstufen bestimmt werden, so die inelastischen Streuungen und (Nukleonen-) Zerfälle. Eine Anziehprozedur für die Greenfunktion wird vorgeschlagen.

Die Unitarisierung wird im rho=2- und rho=3-Sektor untersucht. Es werden die Systemparameter anhand des Fermionenspektrums berechnet und sechs Geister bestimmt, die größenordnungsmäßig mit den Quarkmassen übereinstimmen; einer ist vermutlich Schattengeist der „Eichmasse". Alle bekannten Bosonen- und Fermionenmassen werden größenordnungsmäßig richtig und mit 10-15 % Abweichung zum Experiment berechnet. Experimentell noch nicht gefundene Elementarteilchenresonanzen werden vorausgesagt.

Bei der Berechnung der total elastischen Streuquerschnitte der Nukleon-Nukleon- und Pion-Nukleon-Streuung werden erstmalig relativistische Faddeev-Gleichungen für die nichtlineare Spinortheorie aufgestellt. Die kleinste Geistermasse entspricht den experimentellen Daten. Das veränderte Skalarprodukt und die richtige Berechnung der Wechselwirkungsterme beeinflussen die richtige Größenordnung bzw. Kurvenform und erklären die gute Anpassung der berechneten Streukurven an das Experiment.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Die Kopplungskonstante	10
3.	Quantentheoretischer Formalismus	11
3.1	Grundstrukturen der Quantentheorie	12
3.2	Symmetriebedingungen beim quantentheor. Formalismus	13
3.3	Die S-Matrix im quantentheoretischen Formalismus	15
3.4	Die T-Matrix im quantentheoretischen Formalismus	18
4.	Die dynamische Gleichung	19
4.1	Allgem.-Relativistische Verallgemeinerung	29
4.2	Feldgleichungen mit höheren Produkten	36
4.3	Feldgl. mit anderen Diracdifferentialoperatoren	37
4.4	Nicht-Touschek-invariante Feldgl. mit Diracoperator.	38
4.5	Die Greenfunktion G	38
4.6	Der Propagator F	39
4.7	Kommutatorrelationen	40
4.8	Der Propagator F^+	43
4.9	Der Propagator im de Sitter-Raum	45
4.10	Die Dürr-Sallersche Erweiterung	47
5.	Funktionale Quantenfeldtheorie	53
5.1	Der Übergang zum Funktionalraum	54
5.2	Der Funktionalraum	56
5.2.1	Konstruktion des τ-Funktionensystems	60
5.2.2	Konstruktion des T-Funktionals	60
5.2.3	Konstruktion der dynamischen Gleichung für das Z-Funktional	60
5.3	Konstruktion der dynamischen Gleichung für das ϕ-Funktionensystem	61
5.4	Die Symmetrien im ϕ-Funktionensystem	63
5.4.1	Die Baryoneneichgruppe	64
5.4.2	Die Isospingruppe	66
5.4.3	Die Spingruppe	67
5.4.4	Die Drehgruppe	68
5.4.5	Die diskreten Symmetrien	74
6.	Reduktion auf den ρ-Teilchensektor	78
6.1	Reduktion auf den $\rho+2n$-Teilchensektor	86

6.2	Das Anziehen der Greenfunktion	89
7.	Die Kanalgleichungen	90
7.1	Eigenwertgleichungen und Streugleichungen	99
8.	Die Φ-Funktion	126
9.	Das funktionale Skalarprodukt	128
9.1	S-Matrix und funktionales Skalarprodukt	130
9.2	Herleitung der σ-Funktionen aus dem Propagator	131
9.3	Die Normierung des Skalarproduktes	132
9.3.1	Normierung des freien Diracfeldes im Einteilchensek.	132
9.3.2	" im N-Teilchen-sek.	133
10.	Die Unitarisierung	138
10.1	Die Unitarisierungsprozedur im $\rho = 2$ - Sektor	139
10.2	Unitarisierungsbedingungen durch Zustandsdarstell.	150
10.3	Die physikalische S-Matrix	153
10.4	Mandelstamvariablen bei drei und mehr Teilchen	154
10.5	Unitarisierung im $\rho = 3$ - Sektor	155
10.6	Unitarisierung durch Zustandsdarstellungen im $\rho = 3$ Fall	156
10.7	Neuer Ansatz für die Unitarisierung	159
11.1	Die Fermioneneigenwertgleichung	160
11.2	Die Bosoneneigenwertgleichung	178
12.	Die Streugleichungen	192
12.1	Der Energieerhaltungssatz	192
12.2	Der Wechselwirkungsoperator für die N-N-Streuung	193
12.3	R- und T-Matrix in Bornscher Näherung	193
12.4	Berechnung des Wirkungsquerschnittes	196
12.4.1	Die Unitarisierung des ersten Graphen	205
12.4.2	Berechnung des Term der ersten Näherung	242
12.5	Die relativistische Lippman-Schwingergleichung	245
12.6	Die relativistische Faddeev-Gleichung	246
12.7	Die U-Matrix im Dreiteilchenfall	249
13.	Zusammenfassung	270
A1	Die Grassmann-Algebra	A 1
A2	Die nichtrelativistische Lippman-Schwinger-Gl	A 8
A3	Die nichtrelativistische Faddeev-Gleichung	A16
A4	Formeln für relativistische Spinoren	A25
A5	Integral und Formelsammlung	A37
A6	Die Kovariante Ableitung	A41
A7	Übergang von T-Matrix zum Wirkungsquerschnitt	A43
A8	Berechnung des Integrals $G(p_3 + q_1 - p_2)\, F(p_3)$	A46
A9	Die funktionale Integration	A51

1. Einleitung

Die nichtlineare Spinortheorie entstand aus dem Gedanken, daß sich sowohl alle Elementarteilchen als auch ihre Wechselwirkungen untereinander aus einem unbeobachtbaren Feld bestimmen lassen. Sie war nichtlinear, um Wechselwirkungen von vornherein mit einzuschließen.

Darüber hinaus sollte die Theorie wegen der grundsätzlichen Umwandelbarkeit der kinetischen Energie in Masse unter Berücksichtigung der Kovarianz- und Kausalitätsforderungen den Postulaten der Relativitätstheorie genügen. Vom Urfeld ausgehend vermag man in einer einheitlichen Theorie die Elementarteilchen als stationäre Quantenzustände zu beschreiben und bei Stoßprozessen deren gegenseitige Umwandelbarkeit im Sinne von Übergangswahrscheinlichkeiten zu deuten. Bei der Vereinheitlichung von Relativitäts- und Quantentheorie in der nichtlinearen Spinortheorie kam es zu Divergenzen, die ihre Gründe sowohl in den dichtliegenden Freiheitsgraden des Feldes bei der Quantisierung desselben als auch in den Prinzipien der Mikrokausalität und Lokalität haben. Durch eine nichtkanonische Quantisierung des Feldes, die auf der Annahme beruht, das vorliegende Feld sei unbeobachtbar, lassen sich diese Divergenzen eliminieren. Es besteht daher im Prinzip die Möglichkeit, die Größe der Vertauschungsrelationen so abzuändern, daß eine divergenzfreie Theorie entsteht, welche allerdings zu einer indefiniten Metrik führt.

Das noch verbleibende Problem der Singularitäten der Zweipunktfunktion $F(x,x')$ am Lichtkegel wird dadurch beschränkt, daß man voraussetzt, daß Faltungsintegrale der Form $G(x,x')\ F(x,x')\ F(x,x')$ und $F(x,x')\ F(x,x')\ F(x,x')$ existieren sollen. Diese Bedingungen führen dazu, daß die Zweipunktfunktion keine Terme mit einer δ-Funktion oder deren Ableitung enthalten darf. Das Nichtauftreten der δ- oder δ'-Funktion ist selbst eine notwendige Voraussetzung dafür, daß die Feldgleichung sinnvoll ist /B20/. Für die Massenspektralfunktion ρ resultieren daraus bestimmte Bedingungen, die im folgendem erläutert werden.

Aus dem Lehmann-Källen-Theorem bei nichtkanonischer Quantisierung folgt nämlich, daß nur unter bestimmten Bedin-

gungen für die in der Zweipunktfunktion enthaltenen Spektralfunktion ein singuläres Verhalten auf dem Lichtkegel verhindert werden kann. Dies wird für die Zweipunktfunktion eines skalaren Feldes $\langle 0| T\phi(x)\phi(y) |0\rangle = i \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \Delta_F(x-y,m^2)$ evident, wenn man für das Δ_F die übliche Entwicklung am Lichtkegel einsetzt /4/.

$$\Delta_F(x-y,m^2) = \frac{1}{4\pi} \delta((x-y)^2) + \frac{1}{i4\pi^2} \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{i\,m^2}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{m^2(x-y)^2}}{2} + \text{reg.T}$$

Die Divergenzen lassen sich durch die zusätzlichen Bedingungen

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dm^2 (\rho_1(m^2) + \rho_2(m^2)) = 0 \\ &\int_0^\infty dm^2\, m^2 (\rho_1(m^2) + \rho_2(m^2)) = 0 \\ &\int_0^\infty dm^2\, m (\rho_1(m^2) - \rho_2(m^2)) = 0 \end{aligned} \qquad (1.,1)$$

beseitigen /B20,27,84,90/. Man ist wegen der verschiedenen Paritäten zur Einführung einer zweiten ρ-Funktion gezwungen/B20/. Außerdem müssen die ρ-Funktionen sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Dies führt zwangsläufig zu einer indefiniten Metrik, welche die statistische Interpretation problematisch macht. Die Schwierigkeit bei der Wahrscheinlichkeitsinterpretation wird dadurch aufgehoben, daß man die physikalischen Zustände auf einen positiv definiten Unterraum des erweiterten Zustandsraumes projeziert. Durch diese Projektion wird die S-Matrix, die nicht zwangsläufig unitär ist, weil bei der Dynamik Geister entstehen, unitarisiert. Die Unitarisierung läuft darauf hinaus, den Beitrag der bösen Geister herauszuprojezieren. Dabei werden analytische Bedingungen an die Theorie gestellt, die jeglichen Übergang von einem positiven zu einem negativen Normzustand unterdrücken /siehe Kap. 10/.

Der Grund für die Nichtunitarität der Darstellungsräume der Poincaregruppe ist also der, daß als Spezialfall der Pauli-Villars-Regularisierung Dipolgeister eingeführt wurden. Stumpf und Mitarbeiter /5,6,7,8,11,12,13,16,17,19,20,22,23,24/ entwickelten daraufhin die funktionale Quantenfeldtheorie, da sich die oben erwähnten Darstellungsräume nicht wie Bargmann-Wigner-Darstellungen behandeln lassen. Da keine Operatorlösungen der Feldgleichung bekannt sind und es schwierig ist, solche zu finden, wird folgendermaßen verfahren: Jedem Zustand wird mittels des Feldoperators ein Funktional zugeordnet. Gleichzeitig implizieren die Feldgleichungen eine Funktionalgleichung

für dieses Funktional, die dann näherungsweise gelöst wird. Es werden also Projektionen von erzeugenden Funktionalen auf ein von Feldoperatoren erzeugtes Basissytem zeitgeordneter Produkte angewandt und deren unendliche gekoppelte Gleichungssysteme näherungsweise gelöst.

In so einem Funktionalraum, der über den Hilbertraum Heisenbergscher Überlegungen hinausgeht, werden dann die Symmetrieobservablen definiert und die S-Matrix konstruiert. Alle physikalisch relevanten Informationen müssen aus diesen Funktionalen berechnet werden, wie beispielsweise die verschiedenen Streuquerschnitte, die bei der Streuung von Clustern berechnet werden, sowie die Eigenfunktionale und die Eigenwerte dieser Cluster und auch die Konstanten dieser Theorie.

Unter anderem ist dazu neben der Lösung der Funktionalgleichung und damit der expliziten Konstruktion der Funktionale das Skalarprodukt erforderlich. Stumpf zeigte, daß das physikalische Skalarprodukt im Funktionalraum aus geeigneten Spektralannahmen in Vakuumserwartungswerten normalgeordneter Produkte hergeleitet werden kann /24,27/. In der von Stumpf et alii entwickelten funktionalen Quantentheorie wird die S-Matrix so definiert, daß sie als Skalarprodukt von ein- und auslaufenden Streuzuständen die Streuung hadronischer Cluster zuläßt. Dabei sind die Streuzustände die Lösungen sowohl der dynamischen Gleichung als auch inhomogener relativistischer Kanalgleichungen. Außerdem kann man in dieser funktionalen Formulierung die von Heisenberg zur Regularisierung der Theorie vorgeschlagene nichtkanonische Quantisierung besonders einfach durchführen. Sie äußert sich im wesentlichen nur in der Wahl einer anderen Zweipunktfunktion in der Wicktransformation.

Inzwischen ist die ursprünglich von Heisenberg und Mitarbeitern entwickelte nichtlineare Spinortheorie von Dürr und Saller zu einer radikalen Vereinheitlichungstheorie weiter entwickelt worden. In letzter Zeit werden viele Versuche zu einer einheitlichen Beschreibung der Eigenschaften und Wechselwirkungen der kleinsten Bausteine der Materie, der Elementarteilchen, unternommen. Dabei werden grundsätzlich zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Der erste Weg sind die additiven Vereinheitlichungsschemata.

Sie versuchen die Einordnung der verwirrenden Viel-

falt an fundamentalen Feldern in eine Art Superschema. Eines dieser Vereinheitlichungsschemata, die Grand-Unification-Theorie, baut die fünfzehn Weylspinorfelder und ihre Antifelder, nach Händigkeit geordnet, als verschiedene Komponenten von einem oder zwei mehrkomponentigen Spinorfeldern mit höhereren Symmetrien auf. Dabei wird versucht, die phänomenologisch als richtig erkannte Gruppe

$$G_Q = U(1)_F \otimes U(1,\mathrm{loc})_Y \otimes SU(2,\mathrm{loc})_I \otimes SU(3,\mathrm{loc})_C$$

in eine Supergruppe vom Typ $U(1) \otimes SU(5,\mathrm{loc})$ oder andere noch größere Supergruppen einzubetten, wobei man die fünfzehn Weylspinoren zu einem linkshändigen 10-plett und einem linkshändigen $\overline{5}$-plett der SU(5)-Gruppe zusammenfaßt. Die rechtshändigen Felder $\overline{10}$ und 5 bilden die zugehörigen Antiteilchen. In einer solchen Grand-Unification-Theorie mit der Invarianzgruppe SU(5,loc) müssen insgesamt 24 Vektor-Eichfelder eingeführt werden, wobei nur 12 mit den ursprünglich colour- und flavour-Eichfeldern identifiziert werden können. Die zusätzlichen 12 Vektoreichfelder, ein colour-Triplett-Isodublett und seine Antifelder, sollen zu ganz neuartigen Wechselwirkungen führen, die beispielsweise eine Umwandlung von Hadronen in Leptonen bewirken, also etwa einen Zerfall des Protons in ein Positron.

All dieses kann nur dann mit den experimentellen Daten in Einklang gebracht werden, wenn die globale SU(5)-Symmetriegruppe durch eine geeignete Asymmetrie des Grundzustandes so stark verzerrt wird, daß effektiv nur die Untergruppe G_Q phänomenologisch zum Ausdruck kommt. Um die Asymmetrie im Grundzustand zu erreichen, ist die Kondensation eines 24-komponentigen Higgsfeldes nötig. Die zusätzliche Brechung der flavour-Symmetrien erfordert darüber hinaus die Einführung eines 5-pletts und seiner Antifelder; es enthält neben dem vorher erwähnten colour-Singulett-Isodublett noch ein colour-Triplett-Isosingulett-Skalarfeld.

Selbst diese enorme Fülle an neuen fundamentalen Feldern kann immer noch nicht die Familienstruktur erklären. Das Einbringen dieser Struktur in die Theorie würde eine weitere Vervielfachung der Basis nach dem bekannten Muster oder eine Einbettung in noch höhere Symmetriegruppen benötigen.

Diese Vereinheitlichungs-Theorien haben einen additiven Charakter, da sie die verschiedenen wohletablierten Teiltheorien für starke, elektromagnetische, schwache Wechselwirkung usw. zunächst unverändert zusammenfügt und sie zu einer hochsymmetrischen Theorie ergänzt, um Eindeutigkeit (nur eine Kopplungskonstante) zu erreichen. Sie nimmt die große Zahl der Freiheitsgrade in Kauf und verzichtet auf die tiefere Begründung der Supergruppe und der speziellen Auswahl der für die Fundamentalfelder notwendigen Darstellungen. Sie erfordert einen komplizierten dynamischen Mechanismus (Spezifizierung der Dynamik des Higgssektors), um den Grundzustand derart asymmetrisch zu machen, daß letzlich nur die in der Natur gefundenen Untersymmetrien ausgeprägt werden. Sie hat den Vorteil, daß sie sich in wesentlichen Teilen mit den in der QED erworbenen Werkzeugen (Störungstheorie im Falle renormierbarer Theorien mit hinreichender schwacher Kopplung) quantitativ ausbeuten läßt.

Die andere Vorgehensweise bei der einheitlichen Beschreibung der Elementarteilchen hat einen mehr radikalen Charakter, da sie versucht, alle etablierten Teiltheorien auf eine gemeinsame Wurzel zurückzuführen. Die Vielfalt der Felder soll letzlich aus einem einfachen Materiefeld hervorgehen. Dieses Feld muß stark verkoppelt sein (nichtlinear), um die hohe Verzweigung zu ermöglichen. Unglücklicherweise gibt es für die Behandlung solcher stark nicht-

linearer dynamischer Systeme bisher nur unzureichende mathematische Hilfsmittel.

Bei der radikalen Vereinheitlichung geht man von dem Grundgedanken aus /siehe W.Heisenberg, Naturw. 63,1,1976/, daß in einer relativistischen Theorie der Begriff ‚fundamentales Teilchen' wegen der Paarproduktion im Wechselwirkungsbereich keine Bedeutung hat. In den üblichen Vereinheitlichungsschemata werden die relativistischen Eigenschaften der Theorie

a. durch große Massen der Fundamentalteilchen unterdrückt, so daß ihre Bewegung im wesentlichen nichtrelativistisch wird und
b. dadurch unterdrückt, daß eine abnehmende Stärke der Wechwirkung bei kleinen Entfernungen konzeptuell angenommen wird.

Diese Annahmen haben den Nachteil, daß alle Fundamentalteilchen im lokalen Limes grundsätzlich frei sind und somit jede Möglichkeit einer kompakteren Beschreibung der Wechselwirkung vereitelt wird.

In der radikalen Vereinheitlichung nimmt man hingegen an, daß die Wechselwirkung bei kleinen Entfernungen stark wird. Hierdurch verliert der Begriff ‚Fundamentalteilchen' seine Bedeutung. Was nicht hingegen seine Bedeutung verliert ist das Fundamental-Feld oder Urfeld, das die Kausalitätsstruktur und die fundamentalen Invarianzeigenschaften zu überbringen vermag. Teilchen sind in dieser Interpretationsweise nicht Fundamental-Teilchen, sondern quasistationäre Lösungen der Dynamik der starken Wechselwirkung. Lokal kommt ihnen keine Bedeutung zu, im globalen Limes hingegen erhalten sie die üblichen Eigenschaften. Diese globalen Eigenschaften sind ein Produkt der effektiven Dynamik, die bei der Linearisierung des stark nichtlinearen Systems entsteht. Bei der radikalen Vereinheitlichung befindet man sich auf einer fundamentalen Stufe einer fundamentalen Dynamik, die durch wenige fundamentale Felder, durch eine kleine aber unter der minimalen Feldbedingung maximalen Invarianzgruppe charakterisiert wird.

Auf diese Problematik und auf den Zusammenhang zwischen der bisherigen Theorie und der Dürrschen Erweiterung wird in /4.10/ hingewiesen. Bisher wurde in der nichtlinearen Spinortheorie eine Anzahl von Verfahren und Prozeduren verwendet, die oftmals aus anderen Theorien entlehnt und nicht aufeinander abgestimmt worden waren (z.B. Green-Funktionsverfahren, LSZ-Mechanismen, Projektionsverfahren und Graphentechniken u.a.). So wurden im allgemeinen zwei verschiedene Wege beschritten: Einerseits wurde die Streuung der Elementarteilchen unter Übernahme von Größen aus anderen Modellen bearbeitet, welche andere Rechentechniken und Prozeduren bedingten und meistens nur speziell auf die Berechnung der Elementarteilchenmassen abgestimmt waren /D2;D3;D4;D5;D6/. Andererseits wurde die Berechnung der Elementarteilchenmassen unternommen, ohne auf die Dynamik des Systems tiefgründig einzugehen /D7;D8;33;34;36;38;39;43;44;45/.

Auf Anregung von Prof. H. Stumpf wurde in der vorliegenden Arbeit eine konsistentere und einheitlichere Prozedur der zwei großen und bislang getrennt behandelten Bereiche der Theorie, dem Elementarteilchen- und dem Streubereich, angewadt. Der dabei eingeschlagene Weg ist folgender:

Die Grundstruktur der Quantentheorie wird erläutert (Kapitel 3). Anschließend werden die Feldgleichungen, die Erhaltungssätze und die Symmetrien des Systems beschrieben, mit deren Hilfe die allmähliche Entwicklung der dynamischen Gleichung zu ihrer heutigen Form in Abschnitt 4.0 erklärt wird. In 4.1 werden die allgemein relativistischen Verallgemeinerungen der Heisenberg-Dürr-Wagner-Gleichungen in einer kovarianten Formulierung behandelt. Es folgt die Untersuchung der verschiedenen Teile der Feldgleichungen. In Abschnitt 4.2 werden Gleichungen mit höheren Produkten von Operatoren und in Abschnitt 4.3 Feldgleichungen mit Dirac-Differentialoperatoren höherer Ordnung analysiert. Schließlich werden nicht Touschek-invariante Feldgleichungen behandelt und allgemein relativistisch verallgemeinert (Abschnitt 4.4).

Die Form der Feldgleichungen bedingt die Wahl der Greenfunktion. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 4.5 erläutert. In 4.6 wird dann der freie Propagator aus einem Gleichungssystem für freie Felder errechnet. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Abschnitt /4.7/ wird die Zweipunktfunktion in Abschnitt 4.8 hergeleitet. Der Propagator wird sodann

in seine Teilchen- , Geister- und Dipolgeistanteile zerlegt und die Metrik im Einteilchensektor aufgestellt. In 4.9 werden dann der Propagator im de Sitter-Raum aufgestellt, die Regularisierungseigenschaften dieses allgemein relativistischen Raumes behandelt und in einem vereinfachten Modell ohne Wechselwirkung und ohne Hadronen-Spektrum erstmalig das kontinuierliche und das Elementarteilchen-Spektrum der vereinfachten Feldgleichung berechnet. Die berechneten Elementarteilchen weisen als besonderes Merkmal eine eingeprägte Länge auf.

Die funktionale Quantenfeldtheorie des nichtlinearen Spinorfeldes wird im Kapitel 5 beschrieben. Im Abschnitt 5.1 und 5.2 wird der Funktionalraum konkret behandelt. Die Konstruktion der dynamischen Gleichung für das Φ-Funktionensystem wird in 5.3 gezeigt, und die Symmetrien für dieses System werden in 5.4 aufgestellt.

Die Feldgleichungen werden im Abschnitt 6.0 auf den ρ-Teilchensektor reduziert. Es ergaben sich dabei neue Feldgleichungen, die bisher noch nicht aufgestellt wurden. Neu ist auch die Behandlung des $\rho+2$-Sektors im Abschnitt 6.1 sowie die Untersuchung einer Anziehprozedur für die Green-Funktion in einer Dipoltheorie und die Angabe einer konsistenten Berechnungsprozedur für den Propagator im Abschnitt 6.2 .

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 6 werden im Kapitel 7 die Kanalgleichungen hergeleitet.

Im Kapitel 9 wird das funktionale Skalarprodukt dargestellt und im Kapitel 10 die Unitarisierungsprozedur für den Zweiteilchen- und den Dreiteilchen-Sektor erläutert und berechnet. Zusätzlich wird darauf hingewiesen, daß eine Unitarisierungsprozedur neuerer Art durchgeführt werden muß.

Hiervon ausgehend werden zwei Wege beschritten: Der eine ist die Bestimmung der Parameter des Systems anhand des Fermionenspektrums und der Berechnung der Bosonenmassen (Kapitel 11); der andere die Berechnung der elastischen Streuquerschnitte der Nukleon-Nukleon-Streuung und der Pion-Nukleon-Streuung (Kapitel 12). Bei dieser letzten handelt es sich um eine Dreiteilchenstreuung,

welche als Streuung eines freien Teilchens an einem Bindungszustand interpretiert werden kann.

Auf die Kopplungskonstante wird in Kapitel 2 eingegangen. Sie spielt eine wichtige Rolle in verschiedenen Teilen der nichtlinearen Spinortheorie, so bei der Berechnung der Geistermassen, des Bosonenspektrums und der Streuquerschnitte. Ihrer zentralen Stellung wird Rechnung getragen, indem die Kopplungskonstante nicht in der Einleitung, sondern in einem eigenen Kapitel behandelt wird. Es wird dort darauf hingewiesen, daß ihre Bestimmung bei den in dieser Arbeit verwendeten Näherungen Schwierigkeiten bereitet.

2. Die Kopplungskonstante

Wie bereits in der Einleitung erwähnt spielt die Kopplungskonstante eine wichtige Rolle in der nichtlinearen Spinortheorie.

Die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung ist nicht genau bekannt. Sie wird einerseits als pseudo-skalare Pion - Nukleon - Kopplungskostante bei Stoßprozessen zwischen Pionen und Nukleonen sowie bei den Kernkräften zwischen zwei Nukleonen, die hauptsächlich dem Pionfeld zuzuschreiben sind, mit dem Wert

$$\frac{L^2}{4\hbar c \pi} = 15 \qquad (2.,1)$$

angegeben; für andere Kernproßesse,an denen Pionen und Nukleonen beteiligt sind, verwendet man andererseits

$$\frac{(L m_\pi)^2}{16 \mu^2 \hbar c \pi} = 0.08 \qquad (2.,2)$$

Diese Pseudovektorkopplungskonstante ist beträchtlich kleiner als die obere Kopplungskonstante. Aufgrund dieser Zweideutigkeit schließt man einen Kompromiß und nimmt für die Konstante den Wert 1 an /B45/.

In der vorliegenden Arbeit wird diesem Kompromiß nicht gefolgt, sondern es wird die Kopplungskonstante für das Bosonenspektrum anhand des Fermionenspektrums bestimmt. Das hängt damit zusammen, daß die nichtlineare Spinortheorie eine Fundamentaltheorie ist, aus der sämtliche physikalischen Größen berechnet werden /B40/, ohne irgendwelche Größen als gegeben anzunehmen.

3. Quantentheoretischer Formalismus

Nach dem heutigen Stand der experimentellen Untersuchungen an Elementarteilchen und solange sich keine freien Quarks oder Sub-Quarks als wahre elementare Aufbaupartikeln der Elementarteilchen nachweisen lassen, besteht kein Unterschied zwischen den gebundenen Systemen und den „Elementarteilchen". Die Heisenbergsche nichtlineare Spinortheorie trägt diesem Umstand Rechnung, indem sie keine Elementarteilchen einführt, sondern diese als Lösungen des quantisierten Spinorfeldes interpretiert. Die Elementarteilchen treten also als gebundene Zustände der Feldgleichungen auf, die sich von komplexeren Bindungszuständen wie Atomkernen und Atomen durch gruppentheoretische Eigenschaften unterscheiden.

Jede experimentelle Untersuchung der Elementarteilchen läuft im Grunde auf Streu- und Stoßprozesse hinaus. Um die Ergebnisse der Theorie mit dem Experiment vergleichen zu können, müssen theoretische Größen geschaffen werden, die die experimentellen Prozesse zu beschreiben vermögen. Zu diesem Zweck konzipierte Heisenberg die S(treu)-Matrix /69/. Er schuf dadurch eine Quantentheorie, die ausschließlich auf „beobachtbaren Größen" beruhte, wobei diese beobachtbaren Größen die Energien der stationären Zustände des Systems sowie die asymptotischen Parameter der Streuexperimente sein sollten. Obwohl scheinbar verschieden brauchen diese beiden Arten von Größen nicht separat in die Theorie eingeführt zu werden, da die S-Matrix sowohl gebundene Zustände als auch Streuzustände zu beschreiben vermag. Ersichtlicher wird dies dadurch, wenn man bedenkt, daß wenn ein Streusystem in einem Kasten eingeschlossen wird, die diskreten Energien des Systems durch die Phasenverschiebungen allein bestimmt sind und umgekehrt. Dies zeigt, daß die diskreten stationären Energien einerseits und die Viererimpulse von auslaufenden Teilchen in einem Streuexperiment anderseits im Grunde genommen Größen derselben Art sind /B40/.

3.1 Grundstrukturen der Quantentheorie

Um den Aufbau der funktionalen Quantenfeldtheorie (FQFT) zu verstehen, muß man sich zuerst über die allgemeine Struktur der konventionellen Quantentheorien klar werden /28/.

Da es sich bei der Quantenfeldtheorie um eine statistische Theorie handelt, welche die nicht vollständige Determiniertheit eines Systems beschreiben soll, muß hier ein Ensemble äquivalenter Systeme vorausgesetzt werden. Hierbei darf die gleichzeitige Betrachtung mehrerer Systeme keine Auswirkungen auf das Experiment haben, d.h. die Einzelsysteme müssen bezüglich der Klasse der Experimente voneinander unabhängig sein. Jedes dieser Systeme wird durch sogenannte Observablen R charakterisiert, die im Gegensatz zur klassischen Mechanik keine zahlenwertigen Funktionen, sondern Operatoren sind. Die Operatoreigenschaften werden in der Quantentheorie eindeutig durch die Quantisierungsbedingungen bestimmt. Diese drücken sich in den Kommutatorrelationen aus:

$$[R,R']_{\pm} \neq 0 \qquad (3.1,1)$$

Um solche Observablen bestimmen zu können, muß zuerst der Zustandsraum eindeutig festgelegt werden. Für Observablen, die algebraisch eingeführt werden, nimmt man einen linearen Zustandsraum an, dessen einzelne Elemente die sogenannten Zustandsvektoren sind. Aus der statistischen Interpretation folgt, daß man mit Hilberträumen zu arbeiten hat/28/. Mit einem Satz Basiszuständen

$$|\Psi_k\rangle \in H \; ; \; k = 1,2,\ldots$$

spannt man den Hilbertraum H auf. Diese Zustände haben(unter anderem) folgende Eigenschaften:

Unter der Voraussetzung $|\Phi_k\rangle \in H$, $|\Psi_m\rangle \in H$, $a \in \mathbb{C}$ folgt

$$|\Phi_k\rangle + |\Psi_m\rangle = |\xi\rangle \in H \qquad (3.1,2)$$

Ähnliches gilt für die zweite Operation, die in diesem Raum definiert wird: die Multiplikation mit einem Skalar.

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $|\Theta_m\rangle \in H$, so gilt:

$$a|\Theta_m\rangle = |\Psi_m\rangle \in H \qquad (3.1,3)$$

Zusätzlich wird eine positiv-definite Bilinearform definiert, die als Skalarprodukt aufgefaßt wird und folgende Eigenschaften hat:

mit $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle \in H$ gilt

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle^* \in \mathbb{C} \qquad (3.1,4)$$

$$\langle\Phi_1+\Phi_2|\Psi\rangle = \langle\Phi_1|\Psi\rangle + \langle\Phi_2|\Psi\rangle \qquad (3.1,5)$$

$\langle a\,\phi|\psi\rangle = a\,\langle\phi|\psi\rangle$ - für beliebiges a (3.1,6)

$\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$ (3.1,7)

Geht man davon aus, man hätte es mit reinen Zuständen zu tun - mit Zuständen also, für die ein vollständiger Satz simultan meßbarer Observablen mit Werten existiert, die keiner Fluktuation in diesem Zustand unterworfen sind und die somit nicht als Linearkombination zweier verschiedener Zustände darstellbar sind -, so kann man den Erwartungswert dieser Observablen wie folgt definieren:

$\bar{R}_\phi = \langle\phi|R|\phi\rangle$ (3.1,8)

Können bestimmte Basissysteme so gewählt werden, daß die Operatoren diagonal werden, so gilt:

$R|\phi_n\rangle = r_n|\phi_n\rangle$ (3.1,9)

wobei r_n die Eigenwerte, d.h. die Meßwerte für ein Experiment darstellt, die sich im Zustand $|\phi_n\rangle$ befinden. Dadurch, daß die Meßwerte reell sind, müssen auch die Eigenwerte reell sein. Das bedingt jedoch, daß die Observablen selbstadjungiert sind.

Neben der Aufstellung von einem vollständigen Satz Observablen ist die Feststellung der der Theorie eigenen Bezugssysteme und ihrer Transformation ineinander wichtig.

3.2 Symmetriebedingungen beim Quantentheoretischen Formalismus

Eine Transformationstheorie beschreibt die Veränderung der einzelnen Observablen beim Bezugssystemwechsel, so daß die Symmetriegruppe der Theorie das Fundament darstellt, auf dem dann der Satz maximal kommutierender Observablen aufgebaut werden kann. Aus diesen lassen sich die Eigenwertgleichungen und die Eigenwerte konstruieren, die selbst die Zustände bestimmen. Aus all diesen Zuständen kann man ein System von Basiszuständen aufbauen, deren Änderung unter der Symmetriegruppe unseres Systems analysiert werden soll. Da wir es in unserem Fall mit einer relativistischen Quantenfeldtheorie zu tun haben, ist diese Symmetriegruppe die Poincaregruppe, welche durch folgende Transformation gekennzeichnet ist:

$x'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} x_\nu + d_\mu$ (3.2,1)

Das hat zur Folge, daß analoge physikalische Größen in den zwei Bezugssystemen äquivalent sind. Die Dynamik eines Systems in der Quantentheorie ist durch den Satz von Eigenwertgleichungen charakterisiert. Im ungestrichenen System lauten die Eigenwertgleichungen:

$$R_\alpha |\phi_n\rangle = (r_\alpha)_n |\phi_n\rangle \quad \text{wobei } 1 \leq \alpha \leq n \tag{3.2,2}$$

und im gestrichenen System

$$R'_\alpha |\phi_n\rangle' = (r_\alpha)'_n |\phi_n\rangle' \quad \text{wobei } 1 \leq \alpha \leq n .$$

Wegen der Äquivalenz des physikalischen Zustandes in beiden Bezugssystemen kann man $|\phi_n\rangle'$ auf $|\phi_n\rangle$ abbilden:

$$|\phi_n\rangle' = U(\Lambda,d)|\phi_n\rangle \tag{3.2,3}$$

Da in beiden Bezugssystemen dieselben Regeln gelten sollen, muß der Operator U ein Unitärer Operator in H sein. Der Zustandsraum ist demnach ein Darstellungsraum für die unitären Darstellungen der Poincarégruppe /28/. Substitution von /3.2,3/ in /3.2,2/ gibt

$$R_{\alpha'} = U^{-1} R_\alpha U \; ; \quad 1 \leq \alpha \leq n$$

und wegen der Forminvarianz $[R_\alpha, U] = 0$ d.h. die skalaren Observablen kommutieren mit den Gruppenoperationen. Berücksichtigt man nicht all diejenigen Observablen, die nicht von den Raumfreiheitsgraden abhängen (z.B. Isospin), so bleiben nur noch die Casimir-Operatoren der Darstellung übrig, die noch mit U kommutieren. Es handelt sich dabei um $\hat{P}^2$, die Masse, und um $\hat{J}^2$, den Spin eines Systems - folglich auch eines Elementarteilchens -. Die Casimir-Operatoren klassifizieren die irreduziblen Darstellungen der Poincaregruppe. Es kann gezeigt werden, daß zwei weitere Operatoren diagonal in der irreduziblen Darstellung und deshalb gleichzeitig mit den Casimir-Operatoren meßbar sind. Es handelt sich um $\vec{\hat{P}}$, den totalen Impuls, und $\hat{S}_z$, die Spinprojektion auf unsere Quantisierungsrichtung.

Wir erhalten insofern vier Eigenwertgleichungen für diese vier Operatoren, die gleichzeitig gemessen werden können und die einen vollständigen Satz kommutierender Observablen darstellen.

$$\hat{P} |\phi\rangle = p |\phi\rangle \tag{3.2.4}$$

$$\hat{P}^2 |\phi\rangle = m^2 |\phi\rangle \tag{3.2,5}$$

$$\hat{J}^2 |\phi\rangle = s\cdot(s+1) |\phi\rangle$$

$$\hat{S}_z |\phi\rangle = s_z |\phi\rangle$$

Wegen der möglichen Entartung ist aber ein vollständiger Satz gleichzeitig meßbarer Observablen zwar notwendig, aber noch nicht hinreichend als Bedingung für die Aufstellung eines vollständigen Zustandsraumes. Vielmehr müssen noch die Zustände $|\phi\rangle$ bestimmten zusätzlichen Randbedingungen genügen,

die zu einer Unterscheidung zwischen gebundenen Zuständen und Streuzuständen führen. Für die gebundenen Zustände haben wir es mit einer eins-zu-eins-Abbildung zwischen meßbaren Quantenzahlen und den Zuständen zu tun. Analog haben wir es auch jeweils für die ein- und auslaufenden Zustände mit einer eindeutigen Abbildung zwischen Quantenzahlen und Zuständen zu tun.

Für die Streuzustände erhalten wir aus den Grenzbedingungen eine zusätzliche Information, die wegen der Entartung nicht aus den Quantenzahlen herausgelesen werden kann. Diese Entartung liegt darin begründet, daß wir eine gewisse Freiheit bei der Präparation der Anfangs- und der Messung der Endzustände haben, die durch die Zustandsvektoren $|\Theta(n)\rangle^{-}$ versinnbildlicht werden.

3.3 Die S-Matrix im Quantentheoretischen Formalismus

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt beschriebenen Zustandsvektoren können wir eine Abbildung von einem Anfangs- zu dem Endzustand eines Streuvorganges definieren:

$$|\Phi_\beta\rangle^{in} = S_{\beta n} |\Phi_n\rangle^{out} \qquad (3.3,1)$$

Diese S-Matrix wird im folgenden näher betrachtet. Sie ist von Wichtigkeit für den nichtrelativistischen Fall, der unten beschrieben wird. Bei den relativistischen Berechnungen geht man analog vor und bedient sich hierfür ebenfalls einer S-Matrix.

Die S-Matrix ist die zentrale Größe aller mikroskopischen Elementarteilchentheorien. Zu ihrer Definition wird berücksichtigt, daß Theorien angezogener physikalischer Teilchen mathematisch nur durch Integralgleichungen behandelt werden können /B40/. Insofern scheiden von vornherein alle Differentialgleichungsverfahren aus, die zu einer S-Matrix-Darstellung hinführen könnten. Auf die Frage des Zusammenhanges zwischen Integralgleichungsverfahren und S-Matrix-Darstellung wird in diesem Zusammenhang nicht gesondert darauf eingegangen (B17 geht auf diese Frage im Kap.3 ein). Die physikalische Vorstellung, die den Streuprozessen zugrundeliegt, ist die folgende: Man nimmt am Beginn des Streuprozesses weit voneinander entfernte freie Teilchen an, deren Wechselwirkung vernachlässigbar ist. Kommt es zu einer Streuung, so wird das Wechselwirkungspotential wirksam. Nach Ablauf der Streuung entfernen sich diese

Teilchen wieder und laufen als freie Teilchen aus. Beobachtbar sind nur der Anfangs- und der Endzustand, da die freien Teilchen in diesen Zuständen mit der Messapparatur in Wechselwirkung treten. Charakteristisch für den Streuvorgang ist der Wert der Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang zwischen dem angenommenen Anfangszustand und dem angenommenen Endzustand. Zur Definition der Streumatrix des Problems geht man von einer Zustandsgleichung wie der zeitabhängigen Schrödingergleichung aus:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = H\,|\Psi\rangle \qquad (3.3,2)$$

wobei H üblicherweise aus einem ungestörten und einem gestörten Anteil

$$H = H_0 + \lambda V \qquad (3.3,3)$$

besteht, der die Wechselwirkung beschreibt. Physikalisch präpariert man zur Zeit $t=t_0$ einen Zustand $|\Psi(t_0)\rangle$ und untersucht seine Entwicklung für $t > t_0$.

Hat man es mit einer Mannigfaltigkeit $|\Phi(p_1 r_1 \lambda_1 \ldots p_n r_n \lambda_n, t)\rangle = A^{\lambda_1}(p_1 r_1 t) \ldots A^{\lambda_n}(p_n r_n t)\,|\Psi_0\rangle$ zu tun, aus der durch Variation von p_i r_i n und λ_i ein Zustandsvektorensatz erhalten wird, der den Hilbertraum der wechselwirkungsfreien Mehrteilchenzustände definiert, und sollen überdies die Anfangszustände die Zustände der freien einlaufenden Teilchen beschreiben, so schreibt man:

$$|\Psi_\rho^{in}\rangle = \lim_{t_0 \to -\infty} |\Phi_\rho(t_0)\rangle \qquad (3.3,4)$$

wobei der Index die Quantenzahlen, die zur Beschreibung der freien Teilchen benötigt werden, charakterisiert.
Durch formale Integration der Schrödingergleichung erhält man:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}\,|\Psi(t_0)\rangle \qquad (3.3,5)$$

Mit diesem Ergebnis erhält man für $t_0 \to -\infty$

$$|\Psi_\rho^-(t)\rangle = \lim_{t_0 \to -\infty} e^{-iH(t-t_0)}\,|\Psi_\rho^{in}(t_0)\rangle \qquad (3.3,6)$$

Unter $|\Psi_\rho^-(t)\rangle$ versteht man also den Zustand, der sich aus dem freien einlaufenden Teilchenzustand $|\Psi_\rho^{in}\rangle$ für $t > t_0$ entwickelt.

Unter der Annahme, nach langer Zeit sei der Stoßprozeß abgeschlossen, lassen sich die $|\Psi_\rho^-(t)\rangle$ spektral nach freien Teilchenzuständen analysieren:

$$|\Psi_\omega^{out}\rangle = \lim_{t_0' \to \infty} |\Phi_\omega(t_0')\rangle \qquad (3.3,7)$$

Die S-Matrix wird dann folgendermaßen definiert:

$$S_{\rho\omega} = \lim_{t_0 \to \infty} \langle \Psi_\omega^{out} | \Psi_\rho^{-}(t_0') \rangle \qquad (3.3,8)$$

Analog läßt sich eine Lösung für $t < t_0'$ finden

$$| \Psi(t) \rangle = e^{-iH(t-t_0')} | \Psi(t_0') \rangle \qquad (3.3,9)$$

bzw. als Endbedingung:

$$| \Psi_\omega^{+}(t) \rangle = \lim_{t_0' \to \infty} e^{-iH(t-t_0')} | \Psi_\omega^{out} \rangle \qquad (3.3,10)$$

Unter hermitescher Konjugation erhält man für /3.3,10/

$$\langle \Psi_\omega^{+}(t) | = \lim_{t_0' \to \infty} \langle \Psi_\omega^{out} | e^{iH(t-t_0')}$$

Für die S-Matrix bedeutet dieses

$$S_{\rho\omega} = \lim_{\substack{t_0' \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} \langle \Psi_\omega^{out} | e^{-iH(t_0'-t_0)} | \Psi_\rho^{in} \rangle \qquad (3.3,11)$$

$$= \langle \Psi_\omega^{+}(t) | \Psi_\rho^{-}(t) \rangle$$

Gehen wir nun auf die Wechselwirkungsdarstellung über und betrachten Zweiteilchenzustände von H_0.

Für $t=0$ ist die S-Matrix dann

$$S_{\rho\omega} = \lim_{\substack{t_0' \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} \langle \Psi_\omega^{out} | e^{-iH_0 t_0'} e^{iH_0 t_0'} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} e^{iH_0 t_0} | \Psi_\rho^{in} \rangle \qquad (3.3,12)$$

$$= \lim_{\substack{t_0' \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} \langle \Phi_\omega | U(t_0', t_0) | \Phi_\rho \rangle$$

mit $U(t_0', t_0) = e^{iH_0 t_0'} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0}$

und $\langle \Phi_\omega | = \lim_{t_0' \to +\infty} \langle \Psi_\omega^{out} | e^{-iH_0 t_0'}$

sowie $| \Phi_\rho \rangle = \lim_{t_0 \to -\infty} e^{iH_0 t_0} | \Psi_\rho^{in} \rangle$

H_0 ist der Hamiltonoperator der freien Theorie. Die verschiedenen S-Matrix-Definitionen sind für praktische Berechnungen deswegen nicht geeignet, weil die ein- und auslaufenden freien Teilchenzustände auf verschiedene Zeiten bezogen sind, die unendlich weit auseinanderliegen und die folglich zu nicht berechenbaren Phasenverschiebungen zwischen den asymptotischen freien Zuständen führen.

Aus der Schrödingergleichung ergibt sich für U

$$i\frac{\partial}{\partial t}\, U(t,t_o) = \lambda\, V(t)\, U(t,t_o) \qquad (3.3,13)$$

Wegen $U(t_o,t_o) = 1$ erhält man folgende Integralgleichung:

$$U(t,t_o) = 1 + \frac{1}{i}\,\lambda \int_{t_o}^{t} V(t')\, U(t',t_o)\, dt'$$

Das ist die Volterrasche Operator-Integralgleichung. Die Volterrareihe kann auf verschiedene Weisen approximiert werden. Üblicherweise unterzieht man sie der Dysonentwicklung, die allerdings nur eine akzeptable Konvergenz bei kleinen Kopplungskonstanten liefert.

3.4 Die T-Matrix im Quantentheoretischen Formalismus

Für die Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten ist die T-Matrix von Bedeutung. Aus der S-Matrix läßt sich die T-Matrix herausfolgern:

$$\begin{aligned} S_{\rho\omega} &= \langle \Psi_\omega^+(0) |\ \Psi_\rho^-(0)\rangle = \lim_{\substack{t_o' \to +\infty \\ t_o \to -\infty}} \langle \Phi_\omega(0) | U(t_o', t_o) |\ \Phi_\rho(0)\rangle = \langle \psi_\omega^- |\ \psi_\rho^+ \rangle \\ &= \langle \psi_\omega^+ |\ \psi_\rho^+ \rangle + \langle \psi_\omega^- - \psi_\omega^+ |\ \psi_\rho^+ \rangle \\ &= \delta_{\rho\omega} - 2\pi i\, \delta(E_\omega - E_\rho)\, \langle \Phi_\omega | V |\ \psi_\rho^+ \rangle \\ &= \delta_{\rho\omega} - 2\pi i\, \delta(E_\omega - E_\rho)\, T_{\rho\omega} \end{aligned} \qquad (3.4,1)$$

4. Die dynamische Gleichung

Die dynamische Gleichung wurde nach mehreren Vorversuchen von Pauli und Heisenberg /63,64,72,76,77,78,80,84/ in der von uns verwendeten Form von Dürr und Wagner /164/ aufgestellt. Bei der Aufstellung dieser Gleichung geht man davon aus, daß bestimmte Erhaltungssätze, charakterisiert durch eine bestimmte Gruppenstruktur, voll, andere dagegen nur näherungsweise zu gelten scheinen.

Im folgenden Abschnitt wird die Entwicklung dieser Gleichung kurz rekapituliert und dabei aufgezeigt, welche physikalischen und mathematischen Überlegungen zu der Gleichung geführt haben.

Die dynamische Gleichung entstand als Verallgemeinerung aus der quantenmechanischen Feldgleichung mit nichtlinearer Materiewechselwirkung. Diese Feldgleichung läßt sich im Fockraum folgendermaßen schreiben:

$$(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\ \psi(x,t) + L^2 \int \psi^{\dagger}(x',t)\, V(x'-x)\, \psi(x',t)\ \ \psi(x',t)\, d^3x' = 0 \qquad (4.,1)$$

Die relativistische Verallgemeinerung dieser Gleichung, die von Heisenberg et alii zuerst gefunden wurde, sah folgendermaßen aus:

$$i\sigma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\chi(x) + L^2 : \sigma^{\nu}\chi(x)[\chi^{*}(x)\,\sigma_{\nu}\,\chi(x)] : = 0 \qquad a$$

$$i\bar{\sigma}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\hat{\chi}(x) + L^2 : \bar{\sigma}^{\nu}\hat{\chi}(x)[\hat{\chi}^{*}(x)\,\bar{\sigma}_{\nu}\hat{\chi}(x)] : = 0 \qquad b \qquad (4.,2)$$

Die Symmetrie, die als fundamental angesehen wird und die dieser Gleichung zugrunde liegt, ist die Lorentzgruppe und für den Isospin die Gruppe U_2. Die Gruppe SU_3 oder andere höhere Gruppen werden als genäherte dynamische Symmetrien angesehen. Der Feldoperator $\chi(x)$ ist ein zweikomponentiger Spinor im Lorentzraum und ebenenfalls ein zweikomponentiger Spinor im Isospinraum. Führen wir zwei Indices ein, welche jeweils einen dieser beiden Räume kennzeichnen, so nimmt Gleichung /4.,2a/ folgende Form an:

$$i\,1\!\!1_{\rho\gamma}\sigma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial\chi_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^{\nu}} + L^2 1\!\!1_{\rho\gamma}\sigma^{\nu}_{\alpha\beta} : \chi_{\beta\gamma}(x)\ \ \chi^{*}_{\delta\kappa}(x)\,(\sigma_{\nu})_{\delta\eta}\,1\!\!1_{\kappa\varepsilon}\chi_{\eta\varepsilon}(x) : \ = 0 \qquad (4.,3)$$

Die $\sigma^{\nu} = (1, \vec{\sigma})$ sind die üblichen Paulimatrizen, und die Doppelpunkte symbolisieren das Wickprodukt.

Faßt man die zwei-mal-zwei-komponentigen Weylspinoren zu einem

vierkomponentigen Diracspinor zusammen, so lautet /4.,3/ :

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\nu} + L^2 : [\gamma^\mu \gamma_5 \psi_\alpha (\bar{\psi}_\beta \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\gamma)] : = 0 \qquad (4.,4)$$

Hierbei bedeutet γ die üblichen γ-Matrizen. Die zwei-mal-zwei Weylspinoren transformieren sich folgendermaßen in die vierkomponentigen Diracspinoren:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= +\chi_{11} \\ \psi_2 &= +\chi_{21} \\ \psi_3^* &= +\chi_{22} \\ \psi_4^* &= -\chi_{12} \end{aligned} \qquad (4.,5)$$

Drückt man diese Feldgleichung durch σ -Matrizen aus, so lautet sie:

$$i\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi + L^2 : \sigma_\nu \psi (\psi^* \sigma^\nu \psi) : = 0 \qquad (4.,6)$$

Für rechtshändige Spinoren mit Isospin $\frac{1}{2}$ wird diese Gleichung unter Berücksichtigung, daß für Fermistatistik die Isospin-Variablen symmetrisch miteinander verbunden sein müssen:

$$\begin{aligned} & i(1|_\alpha \otimes \sigma_\beta^\nu)\ \delta(x_\alpha - x_\beta) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi_\beta(x) \\ & - L^2 \cdot \frac{1}{4}(3 \cdot 1|_{\alpha\beta} \otimes 1|_{\gamma\delta} + \vec{\tau}_{\alpha\beta} \otimes \vec{\tau}_{\gamma\delta})\ \sigma^\nu_{\alpha\beta}(\sigma_\nu)_{\gamma\delta} : \psi_\beta(x)\ \psi_\delta(x)\ \psi^*_\gamma(x) : = 0 \end{aligned} \qquad (4.,7)$$

Analog kann man mit /4.,4/ vorgehen. Will man beide Feldgleichungen /4.,7 und 4.,4 / zusammen darstellen, so wählt man folgende Form:

$$D_{\alpha'\alpha}\ \psi_\alpha(x) - V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_\alpha(x)\ \psi_\beta(x)\ \psi^*_{\beta'}(x) : = 0 \qquad (4.,8)$$

Dabei sind $D_{\alpha'\alpha}$ und $V_{\alpha'\beta',\alpha\beta}$ in der Form von /4.,7/ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} D_{\alpha'\alpha} &= i\,\Gamma^\nu_{\alpha'\alpha}\ \delta(x_{\alpha'} - x_\alpha) \frac{\partial}{\partial(x)_{\beta'\nu}} \quad \text{wobei } \Gamma^\nu_{\alpha'\alpha} = (1|_{\alpha'} \otimes \sigma^\nu_\alpha) = \delta_{\alpha'\alpha}\ \sigma^\nu_{\alpha'\alpha} \\ V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(3 \cdot 1|_{\alpha'\alpha} \otimes 1|_{\beta'\beta} + \vec{\tau}_{\alpha'\alpha} \otimes \vec{\tau}_{\beta'\beta})\ \sigma^\nu_{\alpha'\alpha}(\sigma_\nu)_{\beta\beta} \end{aligned} \qquad (4.,9)$$

Dabei gilt:

$\bar{\psi} = \psi^* \beta$ und $\gamma^0 = \gamma_t = \beta$

Genau genommen hat man nicht nur eine Feldgleichung für nichthermitesche Spinoroperatoren (/4.,8/), sondern zwei. Sie lauten:

$$D_{\alpha'\alpha}\ \psi_{\alpha}(x) - V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_{\alpha}(x)\ \psi_{\beta}(x)\ \psi^{*}_{\beta'}(x) : = 0$$
$$D_{\alpha'\alpha}\ \psi^{*}_{\alpha'}(x) - V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_{\beta}(x)\ \psi^{*}_{\beta'}(x)\ \psi^{*}_{\alpha'}(x) : = 0 \qquad (4.,10)$$

Dabei transformieren sich die gestrichenen Indices wie die komplexkonjugierte Form der Transformation der ungestrichenen Indices. Die Formeln /4.,10/ sind die Dürr-Wagnerfeldgleichungen für nichthermitesche lokale Feldoperatoren $\psi_{\alpha}(x)$ und $\psi^{*}_{\alpha}(x)$, deren Antikommutator wegen der Forderung der relativistischen Mikrokausalität für raumartige Abstände verschwindet. $D_{\alpha'\alpha}$ ist der hermitesche, imaginäre und antisymmetrische Diracdifferentialoperator, der in einer Theorie mit Dipolregularisierung erster Ordnung ist. Seine allgemeine Form ist in /4.,9/ angegeben. $V_{\alpha'\beta',\alpha\beta}$ ist ein ableitungsfreier lokaler Fierzsymmetrischer Vertex, d.h. ein Vertex, der sowohl in den gestrichenen als auch in den ungestrichenen Indices unter Vertauschung antisymmetrisch ist. Bei den Doppelpunkten handelt es sich - wie schon vorher erwähnt - um ein generalisiertes Wickprodukt; in diesem zeitgeordneten Produkt sind alle zeitgeordneten Vakuumserwartungswerte subtrahiert.

$$V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_{\alpha}\ \psi_{\beta}\ \psi^{*}_{\beta'} : = V_{\alpha'\beta',\alpha\beta}[\ T\ \psi_{\alpha}\psi_{\beta}\psi^{*}_{\beta'} - 2\ F_{\beta\beta'}(0)\ \psi_{\alpha}\ ] \qquad (4.,11)$$

Dabei wird die Antisymmetrie des Vertex benutzt. $F_{\beta\beta'}(0)$ bedeutet hier die Zweipunktfunktion an der Stelle 0:

$$F_{\beta\beta'} = \langle 0|T\psi_{\beta}\psi^{*}_{\beta'}|0\rangle \qquad (4.,12)$$

Folgt man den Überlegungen Heisenbergs, es gebe bestimmte fundamentale Gruppen, die man a priori einzuführen habe, sowie solche Symmetrien, die aus der Dynamik resultieren, so sind die oben aufgeführten Gleichungen die einfachsten, die man postulieren kann. Exakte Symmetrien sind in diesem Zusammenhang die Poincaregruppe, die Isospingruppe, welche zur SU_2-Gruppe isomorph ist, und eine Eichgruppe, welche zur Darstellung der elektrischen und der Baryonenladung benutzt wird. Die SU_3 - Gruppe oder andere höhere Gruppen werden

in der hier besprochenen Heisenberg-Dürr-Wagner-Theorie als angenäherte dynamische Symmetrien angesehen. Das ist ein wesentlicher Vorteil dieser Theorie, man braucht nämlich nicht alle Symmetriebrechungen ad hoc einzuführen.

Die Gleichungen besitzen insgesamt eine 15-parametrige Symmetriegruppe, die folgende Erhaltungssätze impliziert:

1. Energie-Impuls
2. Schwerpunktsbewegung
3. Drehimpuls
4. Elektrische Ladung
5. Baryonenzahl

Wegen des Theorems von Pauli /B46/ sind diese Gleichungen gegenüber der Transformation PCT sowie gegenüber PG, PC und T invariant.

Es ist möglich, durch Verdopplung der Komponentenzahl aus nichthermiteschen Operatoren hermitesche zu machen. Diese 2 X 4 -komponentigen Operatoren haben zwar den Nachteil, daß sie Überlagerungen von Teilchen- und Antiteilchenzuständen präjudizieren und somit wegen der Baryonenzahl zusätzlich noch eine Ausreduktion nach der Baryoneneichgruppe bedingen, haben aber den Vorteil, daß durch sie viele Rechenschritte vereinfacht werden. Faßt man zwei Komponenten des nichthermiteschen Feldes zu einem hermiteschen achtkomponentigen Fermifeldoperator Ψ zusammen, so erhält man:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \text{ , wobei } \Psi = \Psi^* \text{ und } \psi \neq \psi^* \text{ gelten soll und} \qquad (4.,13)$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi^{*T}(x))$$
$$\psi_2(x) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\psi_2(x) - \psi^{*T}(x)) \text{ sind.}$$

Man beachte bitte hierbei, daß die vierkomponentigen Diracspinoren aus 2X2-komponentigen Weyhlspinoren aufgebaut sind.
Dieser Raum, der durch ψ_1 und ψ_2 aufgespannt wird, wird fortan als K-Raum bezeichnet. Eine äquivalente Formulierung der achtkomponentigen hermiteschen Operatoren wäre:

$$\Psi = \hat{U}\,\Psi = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi^{*T}(x) \end{pmatrix}$$
$$\Psi^+ = \Psi^T \hat{U} = (\psi^*(x), \psi^T(x)) \qquad (4.,14)$$

wobei

$\tilde{U}^*$ eine unitäre Transformation im λ -Raum sein soll:

$$\tilde{U}^*_{\alpha_1\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Mit

$\tilde{\Psi}_{1\alpha_2\alpha_3}(x) = \psi_{\alpha_2\alpha_3}$ und $\tilde{\Psi}_{2\alpha_2\alpha_3}(x) = \psi^{\tau}_{\alpha_2\alpha_3}(x)$ erhält man folgende Abbildung:

$$\tilde{\Psi}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x) = U^*_{\alpha_1\beta_1}\ \delta_{\alpha_2\beta_2}\ \delta_{\alpha_3\beta_3}\ \tilde{\Psi}_{\beta_1\beta_2\beta_3}(x) \qquad (4.,15)$$

mit $\alpha = 1,2$ und $\beta = 1,2$.

Diese Operatoren sollen folgender Vertauschungsrelation genügen:

$$[\tilde{\Psi}_\alpha(x), \tilde{\Psi}_\beta(x)]_+ = \rho_0\ \delta_{\alpha\beta}\ \delta(x-x') \quad \text{mit } \rho_0 = \int \rho(m^2)\, dm^2 \qquad (4.,16)$$
$$x_0 = x'_0$$

Wegen der Randbedingungen am Lichtkegel müssen wir $\rho_0 = 0$ fordern /1.,1/.

Für die oben beschriebenen achtkomponentigen Spinoroperatoren verwandeln sich dann die Feldgleichungen /4.,10/in:

$$D_{\alpha\beta}\ \Psi_\beta(x) - V_{\alpha\beta\gamma\delta}\ :\Psi_\beta(x)\ \Psi_\gamma(x)\ \Psi_\delta(x): = 0 \qquad (4.,17)$$

In diesem Raum, der sowohl den physikalischen Teilchenraum als auch den physikalischen Antiteilchenraum beinhaltet, werden nun bestimmte Matrizen eingeführt, die uns bei der Beschreibung des Vertex und des Diracschen Differentialoperators von Nutzen sein werden /93/.

$$\begin{aligned}
\sigma'^{\mu} &= (-i\lambda_2 1\!|\, 1\!|, -\lambda_2\, \sigma_1\, 1\!|, i\sigma_2\ 1\!|\, 1\!|, -i\lambda_2\, \sigma_3\, 1\!|)_{\alpha\beta} \\
\tau'_i &= (-i\lambda_2\tau_1 1\!|, i\ \tau_2 1\!|\, 1\!|, -i\lambda_2\tau_3\ 1\!|)_{\alpha\beta} \\
\lambda'_i &= (c_\tau\, \lambda_1 1\!|, -i\,\lambda_2 1\!|\, 1\!|, c_\tau\lambda_3 1\!|)_{\alpha\beta} \\
\lambda''_i &= (\lambda_1 c_\tau c_\sigma, \lambda_2\ 1\!|\, 1\!|, \lambda_3 c_\tau c_\sigma)_{\alpha\beta} \quad \text{mit}
\end{aligned} \qquad (4.,18)$$

$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $c_\sigma = i\sigma_2$, $c_\tau = i\ \tau_2$ (metrische Fundamentaltensoren im Spin- und Isospinraum)

Die σ-, λ- und τ-Matrizen befolgen die nachstehenden Kommutatorrelationen (vergl. auch Anhang 4)

$$\begin{aligned}
&[\sigma'^{\mu}, \tau'_i]_- = [\lambda''_i, \sigma'_2]_- = [\lambda''_i, \tau'_j]_- = [\lambda'_j, \tau'_j]_- = 0 \\
&[\lambda'_2, \sigma'^0]_- = [\lambda'_2, \sigma'^0]_- = 0 \\
&[\lambda''_3, \sigma'^0]_- = [\lambda'_3, \sigma'^0]_+ = 0
\end{aligned} \qquad (4.,19)$$

$$
\begin{aligned}
[\sigma'_i, \sigma'_j]_- &= -2\,\epsilon_{ijk}\,\sigma'_k \\
[\tau'_i, \tau'_j]_- &= -2\,\epsilon_{ijk}\,\tau'_k \\
[\lambda'_i, \lambda'_j]_- &= 2\,\epsilon_{ijk}\,\lambda'_k \\
[\lambda''_i, \lambda''_j]_- &= 2\,\epsilon_{ijk}\,\lambda''_k
\end{aligned}
\qquad (4.,19)
$$

(griechische Indices=0,1,2,3
lateinische Indices=1,2,3)

Die σ-, τ-, λ'- und λ''-Matrizen sind als direkte Produkte von je drei Pauli-Matrizen zu verstehen, die jeweils im λ-, σ-Spin- und im τ-Isospinraum wirken.

Für Gleichung /4.,17/ gilt:

$$D_{\alpha\beta} = i\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,\delta(x_\alpha - x_\beta)\,\frac{\partial}{\partial(x_\beta)_\nu} \qquad \text{mit } \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = -[\lambda'_2\,\sigma'^{\nu}]_{\alpha\beta}$$

und

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = L^2\,\delta(x_\beta - x_\alpha)\,\delta(x_\gamma - x_\alpha)\,\delta(x_\delta - x_\alpha)\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\frac{1}{2} \qquad (4.,20)$$

mit

$$\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{6}\,(3\,\sigma'^{\mu}\sigma'_{\mu} + \lambda'_2\lambda'_2\tau'_4\tau'_4\sigma'^{\mu}\sigma'_{\mu} + 2(\lambda'_1\lambda'_1 + \lambda'_3\lambda'_3)\,\tau'_4\tau'_4 C_\sigma C_\sigma)_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

und in der paritätssymmetrischen Version:

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = -[\lambda_2\beta\gamma^{\nu}]_{\alpha\beta}$$

$$\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{12}(\beta\beta(1'_1 1'_1 + \gamma_5\gamma_5)[(3 + \lambda'_2\lambda'_2\tau'_4\tau'_4)\,\gamma'^{\mu}\gamma'_{\mu} + 2(\lambda'_1\lambda'_1 + \lambda'_3\lambda'_3) + \tau'_4\tau'_4 CC])_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (4.,21)$$

wobei folgende Definitionen eingeführt worden sind:

$$
\begin{aligned}
\beta\gamma'^{\nu} &= \begin{pmatrix} \sigma^{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{0}{c}\,\nu \end{pmatrix} \\
\beta\gamma_5\gamma'^{\nu} &= \begin{pmatrix} \sigma^{\nu} & 0 \\ 0 & -\frac{0}{\sigma}\,\nu \end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad (4.,22)
$$

$$C = \begin{pmatrix} c_\sigma & 0 \\ 0 & -c_\sigma \end{pmatrix} = \gamma_5 c_\sigma \quad .$$

Für Gleichung /4.,17/ lautet das Wickprodukt:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} : \Psi_\beta \Psi_\gamma \Psi_\delta : = V_{\alpha\beta\gamma\delta}[\,T\Psi_\beta \Psi_\gamma \Psi_\delta - 3\,F_{\beta\gamma}\Psi_\varepsilon] \quad \text{mit} \qquad (4.,23)$$

$$F_{\beta\gamma} = \langle 0|\,T\Psi_\beta \Psi_\gamma\,|0\rangle$$

Der Vertex selbst kann relativ einfach berechnet werden /93/.

Man spannt alle reellen 8X8 - Matrizen auf einer 64-dimensionalen Basis von Γ_i -Matrizen auf, von denen 28 antisymmetrisch und 36 symmetrisch sind. Wählt man die Basiselemente in der nachfolgenden Form, so erhält man den dritten Vertex, der ursprünglich von Dürr-Wagner eingeführt wurde und der unter Beachtung der Symmetrie bei der Paritätstransformation in den

vorigen übergeht. Es gilt:

$$\Gamma_a\Gamma_a := \bar{\sigma}'_\mu\ \sigma'^{\mu} \qquad \text{antisymmetrisch}$$

$$\Gamma_b\Gamma_b := (\lambda'_2\ \vec{\tau}'\ \sigma'_\mu)\ (\lambda'_2\ \vec{\tau}'\ \sigma'^{\mu}) \qquad \text{antisymmetrisch}$$

$$\Gamma_c\Gamma_c := (\lambda'_1\ \vec{\tau}')(\lambda'_1\ \vec{\tau}') + (\lambda'_3\ \vec{\tau}')(\lambda'_3\ \vec{\tau}') \qquad \text{antisymmetrisch}$$

$$\Gamma_d\Gamma_d := (\lambda'_1\ \vec{\sigma}')(\lambda'_1\ \vec{\sigma}') + (\lambda'_3\ \vec{\sigma}')(\lambda'_3\ \vec{\sigma}') \qquad \text{antisymmetrisch}$$

$$\Gamma_e\Gamma_e := (\lambda'_2\ \bar{\sigma}'_\mu)(\lambda'_2\ \sigma'^{\mu}) \qquad \text{symmetrisch} \qquad (4.,24)$$

$$\Gamma_f\Gamma_f := (\vec{\tau}'\ \bar{\sigma}'_\mu)(\vec{\tau}'\ \sigma'^{\mu}) \qquad \text{symmetrisch}$$

$$\Gamma_g\Gamma_g := (\lambda'_1\ \lambda'_1 + \lambda'_3\ \lambda'_3) \qquad \text{symmetrisch}$$

$$\Gamma_h\Gamma_h := (\lambda'_1\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}')(\lambda'_1\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}') + (\lambda'_3\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}')(\lambda'_3\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}') \qquad \text{symmetrisch} \quad /93/$$

Unter Zuhilfenahme von /4.,18+19 sowie A4.4,1-3/ kann man sich überzeugen, daß die Γ_i linear unabhängig sind. Analog zu /A4.5,11/ gilt: $\frac{1}{8}\ \mathrm{Sp}\ (\Gamma_i \Gamma_j) = \delta_{ij}$, und wegen der Vollständigkeit der Fierztransformation für beliebige 8X8 -Matrizen $A_{\alpha\beta}$, $B_{\gamma\delta}$ erhalten wir unter Berücksichtigung von /A4.5,14/:

$$A_{\alpha\beta}\ B_{\gamma\delta} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{64} (A\ \Gamma_i\ B)_{\alpha\beta} \cdot (\Gamma_i)_{\gamma\delta}$$

Sondern wir die Lorentz- und isospininvarianten Vertices aus, so erhält man fünf antisymmetrische und fünf symmetrische Vertices. Sie lauten:

$$\bar{V}^a = \sigma'_\mu\ \sigma'^{\mu}$$

$$\bar{V}^b = (\lambda'_2\ \vec{\tau}'\ \sigma'_\mu)(\lambda'_2\ \vec{\tau}'\ \sigma'^{\mu})$$

$$\bar{V}^c = (\lambda'_1\vec{\tau}')(\lambda'_1\ \vec{\tau}') + (\lambda'_3\ \vec{\tau}')(\lambda'_3\ \vec{\tau}')$$

$$\bar{V}^{c'} = (\lambda'_1\ \vec{\tau}')(\lambda'_1\ \vec{\tau}') - (\lambda'_3\ \vec{\tau}')(\lambda'_3\ \vec{\tau}')$$

$$\bar{V}^{d'} = (\lambda'_1\ \vec{\sigma}')(\lambda'_1\ \vec{\sigma}') - (\lambda'_3\ \vec{\sigma}')(\lambda'_3\ \vec{\sigma}') \qquad (4.,25)$$

$$\bar{V}^e = (\lambda'_2\ \sigma'_\mu)(\lambda'_2\ \sigma'^{\mu})$$

$$\bar{V}^f = (\vec{\tau}'\ \sigma'_\mu)(\vec{\tau}'\ \sigma'^{\mu})$$

$$\bar{V}^g = \lambda'_1\ \lambda'_1 - \lambda'_3\ \lambda'_3$$

$$\bar{V}^{g'} = \lambda'_1\ \lambda'_1 + \lambda'_3\ \lambda'_3$$

$$\bar{V}^{h'} = (\lambda'_1\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}')(\lambda'_1\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}') - (\lambda'_2\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}')(\lambda'_3\ \vec{\tau}'\ \vec{\sigma}')$$

Berücksichtigt man, daß die gestrichenen Vertices $\bar{V}^{c'}$, $\bar{V}^{d'}$, $\bar{V}^{g'}$, $\bar{V}^{h'}$ gleich Null sind /4.,18/, so gilt für die Fierztransformation

der nichtverschwindenden Vertexausdrücke:

$$V^F_{\alpha\delta;\gamma\beta} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{64} (\bar{V}_{\alpha\kappa,\lambda\delta}(\Gamma_i)_{\kappa\lambda})(\Gamma_i)_{\gamma\beta} = \bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} \qquad (4.,26)$$

sowie

$$\bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{64} (\bar{V}^F_{\alpha\kappa;\lambda\beta}(\Gamma_i)_{\kappa\lambda})(\Gamma_i)_{\gamma\delta} = \bar{V}^F_{\alpha\delta;\gamma\beta} \qquad (4.,27)$$

Setzt man in /4.,26/die Ausdrücke/4.,25/ ein,so bemerkt man, daß die Fierztransformierte einer symmetrischen oder antisymmetrischen Vertexfunktion nicht notwendigerweise wieder antisymmetrisch oder symmetrisch sein muß. Folgende Kombination hingegen,

$$\bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{1}{6}(3\bar{V}^a + \bar{V}^b + 2\bar{V}^c)_{\alpha\beta,\gamma\delta} \qquad (4.,28)$$

wechselt bei Fierztransformation nur das Vorzeichen und ist somit total antisymmetrisch in allen vier Indices. Wegen der antivertauschenden Spinorfeldoperatoren ist dieser Vertex der von uns gesuchte Vertexausdruck. Definieren wir noch zusätzliche Abbildung:

$$\bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} \to \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{3}[\bar{V}^A - 2(\bar{V}^A)^{FA}]_{\alpha\beta;\gamma\delta} \qquad (4.,29)$$

so erhalten wir schließlich für unseren Vertex /4.,20/. Bei den vorigen Ausdrücken bedeutete das Semikolon zwischen den Indexpaaren, daß die Fierztransformierte eines doppelsymmetrischen oder eines doppelantisymmetrischen Vertex im allgemeinen weder doppelsymmetrisch noch doppelantisymmetrisch ist. Das Komma in den vorigen Ausdrücken zeigt symmetrische oder antisymmetrische Vertices an. In /4.,29/ bedeutet der erste Term den doppel-antisymmetrischen Teil von $\bar{V}$,und der zweite Term stellt den doppelantisymmetrischen Teil des fierztransformierten doppelantisymmetrischen Teils von $\bar{V}$ dar.

Die verschiedenen Symmetrieoperationen, gegenüber denen die Gleichung /4.,17/ invariant ist, lassen sich mit Hilfe der in Anhang 4 und Kapitel 4 eingeführten Matrizen darstellen. Dabei sollen die Parameter

α_k, β_k

reell sein. Die Feldgleichungen /4.,2 ; 4.,4 und 4.,17/ sind gegenüber der eigentlichen Lorentzgruppe invariant. Der homogene Teil der Lorentztransformation lautet für /4.,2/:

$$\chi_{\gamma\lambda}(x) \to e^{(i/2)(\alpha_k + i\beta_k)(\sigma_k)_{\gamma\delta}} \chi_{\delta\lambda}(x') \qquad (4.,30)$$

Dabei wird k durch die k-Achse festgelegt.

Für /4.,17/ wird die Invarianz gegenüber der Lorentztransformation folgendermaßen dargestellt:

$$\Psi(x) \to e^{\left(\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)}\,\Psi(L^{-1}x) = e^{\left(\vec{\beta}\,\vec{\lambda}_{\frac{1}{2}}\,\vec{\sigma}' + \vec{\gamma}\,\vec{\sigma}'\right)}\,\Psi(L^{-1}x) \qquad (4.,30')$$

Weiter sind die Gleichungen gegenüber der Isospintransformation invariant. Dies bedeutet für /4.,2/:

$$\chi_{\alpha\lambda}(x) \to e^{(i/2)\,\eta_k\,\tau_k\,\lambda\mu}\,\chi_{\alpha\mu}(x) \qquad (4.,31)$$

Für /4.,4/ bedeutet es, daß die Feldgleichung gegenüber der Pauli-Gürscheyschen-Transformation invariant bleibt:

$$\psi \to a\,\psi + b\,\gamma_5 C^{-1}\,\bar{\psi}^{T}$$
$$\psi \to a^*\,\bar{\psi} + b^*\,\psi^{T} C\,\gamma_5 \quad \text{mit } |a^2| + |b^2| = 1 \qquad (4.,31')$$
$$\bar{\psi} = \psi\,\gamma_4$$
$$C\,\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^{T}$$
$$C\,\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^{T}$$
$$C^{T} = -C$$

Für /4.,17/ bedeutet es, daß die Feldgleichung gegenüber folgender Isospintransformation invariant ist:

$$\Psi(x) \to e^{\left(\vec{\alpha}\,\vec{\tau}'\right)}\,\Psi(x) \qquad (4.,31'')$$

In Wirklichkeit ist der Erhaltungssatz für den Isospin nur angenähert gültig. Er ist durch die elektromagnetischen Wechselwirkungen verletzt. Um diese Tatsache aus der Theorie abzuleiten, nimmt man an, daß der Grundzustand ‚Welt' unsymmetrisch ist . Es kommt dann zu einem Austausch von Isospin zwischen den Elementarteilchen und dem Grundzustand /84/. Außerdem ließen sich seltsame Teilchen als Pole einer generalisierten Vierpunktfunktion verstehen /siehe in diesem Zusammenhang 4.6;4.8;5.3/

$$F(xx'\,yy') = \sum_J \langle 0|\,\chi(x)\,\chi^*(x')\,|J\rangle\langle J|\,\chi(y)\,\chi^*(y')\,|0\rangle$$

$$= \langle 0|\,\chi(x)\,\chi^*(x')\,|0\rangle\langle 0|\,\chi(y)\,\chi^*(y')\,|0\rangle$$

$$+ \sum_{\substack{J \\ J\neq 0}} \langle 0|\,\chi(x)\,\chi^*(x')\,|J\rangle\langle J|\,\chi(y)\,\chi^*(y')\,|0\rangle$$

(die Bedeutung der n-Punktfunktionen wird später näher erläutert)

deren x-Variablen von den y-Variablen durch einen großen raumartigen Abstand getrennt sind. Ist also der Grundzustand entartet, so transformieren sich die $|J\rangle$ Zustände anders als

der |0> Zustand. Wenn die verallgemeinerte Zweipunktfunktionen

$$<0|\ \chi(x)\ \chi^*(x)|J>$$

Pole im Impulsraum enthalten, bekommt man Teilchen, die sich gegenüber der Lorentzgruppe normal transformieren lassen, jedoch anormale Transformationseigenschaften bezüglich der Gruppe haben, für die der Grundzustand unsymmetrisch ist. Dieses drückt sich im andersartigen Transformationsverhalten des ersten Termes bezogen auf den zweiten Term in der Vierpunktfunktion $F(x\,x',y\,y')$ aus. Eine derartige Gruppe ist die Isospingruppe.

Eine weitere Transformation, gegenüber der die Feldgleichungen invariant sind, ist die Touschektransformation. Für Gleichung /4.,2/ lautet sie:

$$\chi \rightarrow \exp(i\alpha)\ \chi \qquad \chi^* \rightarrow \chi^*\ \exp(-i\alpha) \tag{4.,32}$$

und für Gleichung /4.,4/ :

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\ \psi \qquad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\ e^{i\alpha\gamma_5} \tag{4.,33}$$

Insbesondere erhält man durch Verknüpfung der dritten Komponenten des Isospins mit der Transformation

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\ \psi \tag{4.,34}$$

unter anderem die Ladung der Elementarteilchen. Die Touschektransformation ist mit der Pauli-Gürschen-Transformation /4.,31'/ vertauschbar. Die Eichtransformation kann z.B. für /4.,17/ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{(\alpha_c \lambda'_3)}\ \Psi(x) \tag{4.,34'}$$

Alle bisher behandelten Transformationen sind kontinuierlich. Zu ihnen gehört auch die Invarianz der Feldgleichungen gegenüber der Skalentransformation. Sie lautet für /4.,2/:

$$\chi(x) \rightarrow n^{1/2}\ \chi(n\,x) \tag{4.,35}$$

Für /4.,4/ erhält man $\psi(x) \rightarrow n^{1/2}\ \psi(n\,x)$ (4.,35')

Diese einparametrige Gruppe steht in engem Zusammenhang mit Teilchen der Ruhemasse 0. Bekanntlich verletzt die Existenz von Teilchen mit endlicher Ruhemasse die Skaleninvarianz. Man deutet diesen Sachverhalt analog zum Isospin als Asymmetrie des Grundzustandes hinsichtlich der Dilatationsgruppe.

Zusätzlich sind Gleichung /4.,2/;/4.,4/ und /4.,17/ gegenüber diskreten Transformationen invariant. Für /4.,17/ sind diese Transformationen:

$$\begin{aligned}
GP &: \Psi(\vec{r},t) \rightarrow \lambda_3'' \Psi(-\vec{r},t) \\
CP &: \Psi(\vec{r},t) \rightarrow c_\tau^{-1} \lambda_3'' \Psi(-\vec{r},t) \\
T &: \Psi(\vec{r},t) \rightarrow c_\tau \lambda_3'' \Psi(\vec{r},-t) \\
PCT &: \Psi(x) \rightarrow \Psi(-x)
\end{aligned} \qquad (4.,36)$$

wobei G=CJ;
J stellt eine 180°- Drehung im Isospinraum dar

Für /4.,4/ ist

$$P : \psi(\vec{r},t) \rightarrow \gamma_4 \psi(-\vec{r},t) \qquad (4.,36')$$

/Zur näheren Definition der guten Quantenzahlen wird auf 5.4 verwiesen/

4.1 Allgemein-relativistische Verallgemeinerung der Feldgleichungen

Die bisher analysierten Feldgleichungen gelten nur für den Minkowskiraum. Will man z.B. Gleichung /4.,6/ auf allgemein-relativistische Räume erweitern, so ersetzt man die partiellen Ableitungen in der Gleichung durch die kovariante Ableitung /A6.,16/. Man erhält:

$$i\sigma^\alpha \left(V_\alpha^{\ \mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\sigma^{\beta\gamma} V_\beta^{\ \nu} V_\alpha^{\ \mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} V_{\gamma\nu}\right]\right)\chi(x)$$

$$+ L^2 \sigma^\alpha \chi(x)(\chi^*(x)\sigma_\alpha \chi(x)) = 0 \qquad (4.1,1)$$

Das ist die allgemein gültige Feldgleichung für alle relativistischen Räume. Im folgenden wird die Feldgleichung in dem de Sitter- und Anti-de Sitter-Raum aufgestellt.

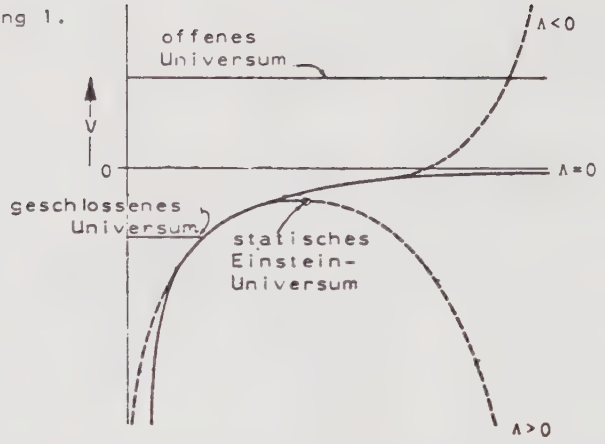
Der de Sitter-Raum ist eines der möglichen Resultate der Einsteinschen Feldgleichung

$$R^{kl}(x) - \frac{1}{2} g^{kl}(x)R = -\frac{\kappa^2}{c^2} T^{kl}(x) - \lambda g^{kl}(x) \quad (\text{mit } T^{kl}(x)=0) \qquad (4.1,2)$$

mit nicht verschwindender kosmologischer Konstante λ.

Abbildung /1/ veranschaulicht den Einfluß der kosmologischen Konstanten λ auf Modelle des 'steady-state'-Typus, wobei V das effektive Potential in der verallgemeinerten Friedmann-gleichung darstellt.

Abbildung 1.



Die kosmologische Konstante stellt möglicherweise eine Energie-Impuls-Dichte des Vakuums dar. In der Mechanik und in der Feldtheorie gehen nur Energieunterschiede, aber keine Absolutwerte der Energiedichte in die Systeme ein. In der Gravitationstheorie hingegen benötigt man absolute Werte zur Beschreibung der Energiedichte des Vakuums. Es hat sich gezeigt /B47/, daß Erzeugung und Vernichtung virtueller Teilchenpaare zu einen nicht verschwindendem Energie-Impuls-Tensor T^{V}_{ik} des Vakuums von der Form $T^{V}_{ik} = \frac{\lambda}{\kappa} g_{ik}$ führen, wobei $\frac{\lambda}{\kappa}$ die Energiedichte des Vakuums angibt. Diese Konstante muß noch quantenfeldtheoretisch im Rahmen der nichtlinearen Theorie des Spinorfeldes berechnet werden.

Der de Sitter-Raum ist das einzige Modell, welches der Einsteinschen Feldgleichung mit $\lambda \neq 0$ genügt und

1. ständig expandiert,
2. für jeden Beobachter im kosmologischen Fluß unabhängig von seiner Position oder Zeit genauso aussieht (Perfektes kosmologisches Prinzip).

Der Einsteintensor sieht in diesem Fall folgendermaßen aus:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = - \lambda\, g_{ab}$$

Aus den kontrahierten Bianchi-Identitäten folgt, daß R im de Sitterschen-Raum-Zeit-Kontinuum konstant ist. Ein Raum mit konstanter Krümmung R = 0 ist die bekannte Minkowski-Raum-Zeit; ein Raum mit R > 0 ist ein de Sitter-Raum, und ein Raum mit der Krümmung R < 0 ist ein de Anti-de Sitter-Raum. Der de Sitter-Raum wird durch ein Hyperboloid

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

im vierdimensionalen Raum dargestellt, der in einem fünfdimensionalen Minkowski-Raum mit der Metrik

$$-dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

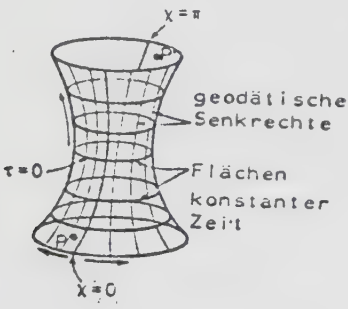
eingebettet ist. Mit (τ,χ,θ,ϕ)-Koordinaten auf dem Hyperboloid erhält man

$$v = a \sinh(a^{-1}\tau)$$
$$w = a \cosh(a^{-1}\tau) \cos\chi$$
$$x = a \cosh(a^{-1}\tau) \sin\chi \cos\theta$$
$$y = a \cosh(a^{-1}\tau) \sin\chi \sin\theta \cos\phi$$
$$z = a \cosh(a^{-1}\tau) \sin\chi \sin\theta \sin\phi$$

und die Metrik ist dann:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2(a^{-1}\tau)[\, d\chi^2 + \sin^2\chi\,(\, d\theta^2 + \sin^2\theta\; d\phi^2\,)]$$

Abbildung 2.

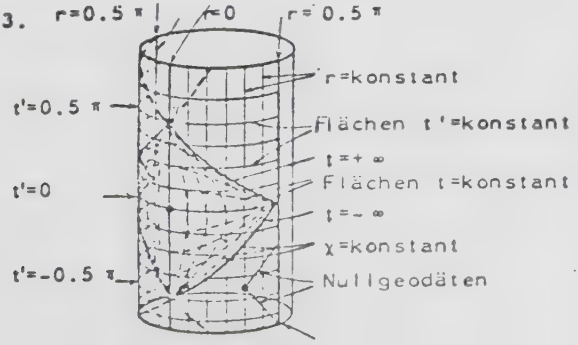


Die Koordinaten (τ,χ,θ,ϕ) bedecken das ganze Hyperboloid.
Für τ = konstant haben die Oberflächen die Krümmung 1

Der Anti-de Sitter-Raum kann durch das Hyperboloid $-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dargestellt werden. Die Metrik dieses Raumes ist:

$$ds^2 = -dt^2 + \cos^2 t\,[\, d\chi^2 + \sinh^2\chi\,(\, d\theta^2 + \sin^2\theta\; d\phi^2\,)]$$

Abbildung 3.



Während die Koordinaten (t',r,θ,ϕ) den ganzen Raum abdecken, decken die Koordinaten (t,χ,θ,ϕ) nur die Hälfte der rautenartigen Region ab.

Die Einführung konformer Koordinaten, die durch die Projektion des Punktes (0,0,0,0,R) der de Sitterschen Hyperfläche auf die Tangentenfläche im Punkt (0,0,0,0,-R) entstehen, ergibt:

$$\xi^{\mu} = \phi(x^2)\, x^{\mu}$$

$$\xi^{5} = -R\, \phi(x^2)\, (1 + \frac{x^2}{4R^2})$$

$$x^{\mu} = \frac{2\,\xi^{\mu}}{1 - \frac{\xi^{5}}{R}} \qquad \text{mit} \quad \phi^{-1}(x^2) = (1 - \frac{x^2}{4R^2}) \text{ und}$$

$$ds^2 = d\xi^{\alpha}\, \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^{\beta}$$

sowie die konforme Bedingung für zwei Räume /B48/

$$g_{\mu\nu} = \phi^2(x^2)\, \eta_{\mu\nu} \qquad (4.1,3)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix} \qquad \mu,\nu = 0,\ldots,3$$

Der de Sitter-Raum wird durch eine vierdimensionale Hyperfläche der Krümmung

$$\xi^{a}\, \eta_{ab}\, \xi^{b} = -R^2$$

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \qquad a,b = 0,\ldots,4$$

dargestellt. Für $R \to \infty$ erhält man für einen fixierten Punkt x^{μ} den üblichen Minkowski-Raum

$$\lim_{R\to\infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

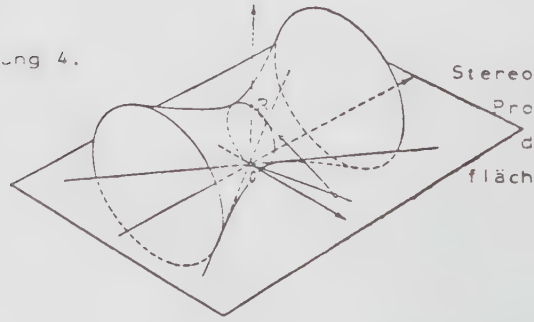
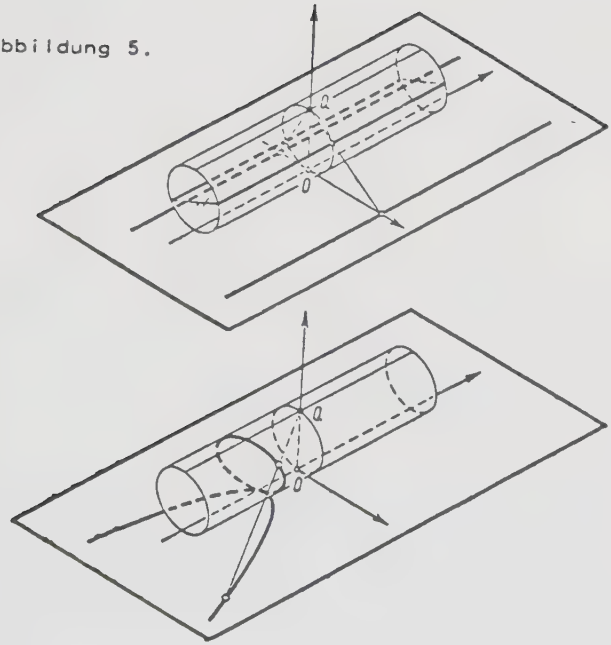


Abbildung 4. Stereografische Projektion der de Sitter-Hyperfläche

Abbildung 5.



Stereografische Projektionen der
Anti- de Sitter - Hyperfläche.

Ein Vergleich von /4.1,3/ mit /A6.,1/ ergibt:

$$g_{\mu\nu} = \phi^2(x^2)\,\eta_{\mu\nu} = V^{\mu}{}_{\mu}\,V^{\nu}{}_{\nu}\,\eta_{\mu\nu} \qquad (4.1,4)$$

Wegen /A6.,4/ folgt

$$V^{\mu}{}_{\mu}\,V^{\nu}{}_{\nu} = \eta_{\mu\,\mu}\,g^{\mu\,\mu}\,V_{\mu}{}^{\mu}\,\eta_{\nu\,\nu}\,g^{\nu\,\nu}\,V_{\nu}{}^{\nu} \qquad (4.1,5)$$

und unter Anwendung von /4.1,4/ erhält man schließlich:

$$V_{\mu}{}^{\mu} = \phi^{-1} \qquad (4.1,6)$$

Die allgemein-relativistische Feldgleichung /4.1,1/ wird mit

$\alpha = \mu$
$\beta = \nu$ und /4.1,6/
$\gamma = \rho$

zu

$$i\sigma^{\mu}\,\phi^{-1}(x^2)\Big[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{4R^2}\,(\sigma x)\,\eta_{\rho\nu}\,\phi^{-3}\Big]\chi(x) + k L^2\,\sigma^{\alpha}\,\chi(x)\,(\chi^{*}(x)\,\sigma_{\alpha}\chi(x)) = 0 \qquad \text{mit } k=1 \qquad (4.1,7)$$

bzw. unter Berücksichtigung der Singularität im de Sitter-Raum bei $x^2 = 4R^2$ erhält man

$$k = \frac{\phi^{-1}}{|\phi^{-1}|}$$

Der Term $(\sigma x/4R^2)\eta_{\rho\nu}\,\phi^{-3}$ drückt den Effekt aus, den die Krümmung der Raum-Zeit auf die Dynamik hat. Durch das Auftreten von R in der Feldgleichung wird die Skaleninvarianz (wie wir sie aus dem Minkowski-Raum kennen /4.,35'/) verletzt; zusätzlich ändert sich das Translationsverhalten.

Die Technik der kovarianten Ableitung hat in letzter Zeit einen großen Aufschwung durch die ‚Grand-Unified Theories' erhalten. Sie hat es uns ermöglicht, den Beitrag der Gravitation über die Metrik in unsere Feldgleichung in eindeutiger Weise zu inkorporieren. Es muß jedoch kritisch bemerkt werden, daß diese Technik zwei Feldgleichungen miteinander in Beziehung gesetzt hat, die sich nicht auf derselben physikalischen Stufe befinden: die Einsteinsche Feldgleichung (eine klassische Feldgleichung) und die Heisenberg-Feldgleichung (eine Gleichung für quantisierte Felder). Zudem kommt noch die Überlegung, wo die Gleichung /4.1,7/ ihre Anwendung finden wird. Es bieten

sich an: 1. Elementarteilchenprozesse in der näheren Umgebung von starken gravitativen Feldern,

2. sehr kurzzeitige Prozesse, bei denen man die Effekte der Vakuumspolarisation mitberücksichtigen muß und

3. Prozesse, die sich im Inneren eines Elementarteilchens abspielen, d.h. bei Quark und Sub-Quark-Theorien.

Experimentell ist man heutzutage um Größenordnungen von diesen Prozessen entfernt; dessenungeachtet sollte man sich - meiner Meinung nach - nicht nur auf die Analyse der Feldgleichungen im Minkowski-Raum beschränken; denn die Annahme, die Gravitation sei zu schwach, um irgend eine Bedeutung für Hadronentheorien zu haben, ist in letzter Zeit immer umstrittener geworden.

Man kann für die starke f-Gravitation nachweisen, daß diese notwendigerweise zu einer endlich ausgedehnten, auf die hadronische Größe beschränkte Gravitation führt. Diese endlich-ausgedehnte Gravitation hat ihren Ursprung in der Wechselwirkung von Gravitonen mit 2^+-Mesonen. Die effektive Gravitationskonstante im Hadron ist von der Größenordnung $G_f = 10^{38} G_N$; G_N ist hierbei die Newtonsche-Gravitationskonstante. Die Krümmung der f-Metrik für die Größenordnung ein Fermi ist insofern sehr groß /178/.

Man kann die Meinung vertreten, daß Sub-Quarks eine extrem hohe Masse haben (Ruhemasse größer als 10^{19} GeV) und daß sie extrem klein sind (ungefähr 10^{-33} cm). Daraus ergibt sich, daß die Sub-Quark-Bindungsenergien im wesentlichen durch den gravitativen Anteil gekennzeichnet sind. Dieser Anteil wäre so groß, daß es unmöglich erscheint, selbst bei den größten Energien der kosmischen Strahlung ein freies Sub-Quark außerhalb der Hadron-Region zu finden. Zusätzlich kann man Bjorken-scaling erwarten, da kein Impulsübertrag die punktartige super-massive Struktur des Sub-Quarks auflösen könnte. Die Raum-Zeit-Krümmung selbst bei dem schwachen G_N auf der „Oberfläche" des Sub-Quarks wäre „unendlich" groß. Diese Argumentation gilt leicht verändert ebenfalls für das t-Quark.

Ob ein Zusammenhang zwischen der extrem hohen Bindungs-gravitationsenergie auf Sub-Quark-Ebene und den Confinement-Eigenschaften der Quarks existiert, ist zur Zeit nicht untersucht worden.

4.2 Feldgleichungen mit höheren Produkten von Feldoperatoren

Bisher wurden nur Feldgleichungen betrachtet, die unter der SU_2 - Gruppe am einfachsten darzustellen waren. Es ist jedoch möglich, von komplizierteren Feldgleichungen auszugehen. In einer Theorie, in der der zweikomponentige Spinorfeldoperator zugleich zwei Isospinfreiheitsgrade besitzt, lassen sich maximal acht Feldoperatoren am gleichen Ort aufstellen. Produkte von mehr als acht Feldoperatoren verschwinden aufgrund des Pauliprinzips, d.h. der Antisymmetrie der Feldoperatoren. Insofern können wir vier lokale Feldoperatoren ohne Ableitung konstruieren. Es handelt sich um:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad \psi(x) \\
&2. \quad :\sigma^{\mu}\psi(x)[\psi^{*}(x)\,\sigma_{\mu}\,\psi(x)]: \\
&3. \quad :\psi(x)\,[\psi^{*}(x)\,\sigma_{\nu}\,\psi(x)]\,[\psi^{*}(x)\,\sigma^{\nu}\psi(x)]: \\
&4. \quad :\sigma^{\mu}\psi(x)[\psi^{*}(x)\sigma_{\mu}\,\psi(x)]\,[\psi^{*}(x)\sigma^{\nu}\,\psi(x)]\,[\psi^{*}(x)\sigma_{\nu}\,\psi(x)]:
\end{aligned}
\qquad (4.2,1)
$$

Dabei beschreiben 1 und 3 Felder mit Rechtshelizität, 2 und 4 Felder mit Linkshelizität. Außer der (üblichen) Symmetrie zwischen den Größen 1 und 2 gibt es zusätzlich eine Symmetrie zwischen 1 und 4. Solch eine Operation entspricht dem Übergang von einem Teilchen zu einem Lochzustand, da eine ψ^{4}-Konfiguration die volle Symmetrie hat. Eine der möglichen Feldgleichungen wäre dann:

$$
i\sigma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\psi(x) - K:\sigma^{\mu}\psi(x)[\psi^{*}(x)\sigma_{\mu}\psi(x)][\psi^{*}(x)\sigma^{\nu}\psi(x)][\psi^{*}(x)\sigma_{\nu}\psi(x)]: = 0 \qquad (4.2,2)
$$

Der Vorteil dieser Gleichung ist, daß der Vertex eine wesentlich kompliziertere Struktur aufweist und somit das Ausrechnen von bisher nicht berechenbaren Prozessen ermöglicht. Von Nachteil ist, daß Produkte von so vielen Operatoren am gleichen Punkt sehr singulär sind; diese Schwierigkeit muß daher durch die Wahl geeigneter Normierungsprozeduren umgangen werden /siehe Abschnitt 9.3/ bzw. /Abschnitt 4.10/.

4.3 Feldgleichungen mit anderen Diracdifferentialoperatoren

In der nichtlinearen Spinortheorie können alle Elementarteilchenmassen und Kopplungskontanten selbstkonsistent berechnet werden. Deshalb brauchen keine ‚nackte'- Massen-Terme für das fundamentale Feld $\psi(x)$ eingeführt zu werden. Man nimmt an, daß alle Massen dynamisch entstehen. Durch die Bedingungen der Invarianz gegenüber der Lorentztransformation und der Paritätstransformation ist der Propagator des Feldes $\psi(x)$ auf die Lehmann-Spektraldarstellung festgelegt:

$$F(p) = \int_0^\infty dm^2 \left[\frac{\rho_1(m^2)}{\not p - m + i\varepsilon} + \frac{\rho_2(m^2)}{\not p + m + i\varepsilon} \right] \qquad (4.3,1)$$

Im Hadron-Modell wird angenommen, daß $\psi(x)$ mit dem Nukleonenfeld identifiziert werden kann, so daß eine der Spektralfunktionen einen $\delta(m^2-\kappa^2)$ proportionalen Beitrag hat. Dieser Pol tritt in der anderen Spektralfunktion nicht auf, um zu verhindern, daß neben dem Nukleon ein anderes Elementarteilchen mit derselben Masse, aber entgegengesetzter Parität existiert. Beachtet man, daß die Feldgleichung Touschek-invariant ist /4.,33/, so folgt daraus, daß die Nukleonenmasse κ gleich Null ist, was nicht physikalisch ist. Dies geschieht analog zur Quanten-Elektrodynamik, bei der aufgrund der Eichtransformationsinvarianz der Theorie die Photonenmasse verschwindet. Im Gegensatz zur QED muß aber hier die Touschek-Invarianz unter allen Umständen gebrochen werden, um dem Nukleon eine Masse zuordnen zu können. Eine Möglichkeit dazu bietet die spontane Symmetriebrechung durch das Vakuum /179/. Die Feldgleichung /4.,17/ wird dann zu:

$$(i\partial_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} + \kappa_0 \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta - V_{\alpha\beta\gamma\delta} : \bar\psi_\beta(x)\, \psi_\gamma(x)\, \psi_\delta(x) : = 0 \qquad (4.3,2)$$

Diese Gleichung ist nicht mehr Touschek-invariant. In dem Hadron-Modell wird diese ‚nackte' Masse κ_0 mit der nackten Masse der Nukleonen identifiziert.

4.4 Nicht-Touschek-invariante Feldgleichungen mit Diracdifferentialoperatoren höherer Ordnung

Will man einen Propagator erhalten, der durch einen Dipolgeist regularisiert ist und durch seine Form einen besonders einfachen Einblick in die Mechanismen der Unitarisierung ermöglicht, so geht man von einer Feldgleichung mit einem Differentialoperator dritter Ordnung aus. Die Feldgleichung lautet:

$$D_{\alpha\beta}\,\Psi_\beta - V_{\alpha\beta\gamma\delta} : \Psi_\beta(x)\,\Psi_\gamma(x)\,\Psi_\delta(x) : \;=\; 0$$

mit

$$D_{\alpha\beta} = (i\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\partial_\mu + \delta_{\alpha\beta}\kappa_0)(i\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\partial_\nu + \delta_{\alpha\beta}\mu_1)(i\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\partial_\tau + \delta_{\alpha\beta}\mu_2) \qquad (4.4,1)$$

Für $\mu_1 = \mu_2$ und $\nu = \tau$ geht diese Gleichung in die Heisenberg-Stumpf-Dürr-Wagner-Gleichung /28/ über mit

$$D_{\alpha\beta} = (i\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\partial_\mu + \delta_{\alpha\beta}\kappa_0)(i\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\partial_\nu + \delta_{\alpha\beta}\mu)^2 \qquad (4.4,2)$$

Bei der allgemein relativistischen Verallgemeinerung dieser Gleichung erhält man:

$$D_{\alpha\beta} = (i\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}[M_\tau{}^{\mu}\,\partial_\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^{\zeta\xi}M_\zeta{}^{\nu}M_\tau{}^{\mu}(\partial_\mu M_{\xi\nu})] + \kappa_0\delta_{\alpha\beta})\otimes$$
$$(i\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}[M_\tau{}^{\nu}\,\partial_\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^{10}M_1{}^{\gamma}M_\tau{}^{\nu}(\partial_\nu M_{0\gamma})] + \mu\delta_{\alpha\beta})^2 \qquad (4.4,3)$$

wobei M in dieser Gleichung V in /A6.,1/ entspricht.

4.5 Die Greenfunktion G

Bei den Berechnungen benutzt man öfter Integral- statt Differentialgleichungen. Man kann die Feldgleichungen invertieren, indem man eine Greenfunktion mit folgenden Eigenschaften einführt:

$$G_{\alpha\beta}(x-x')\,D_{\beta\gamma} = D_{\alpha\beta}\,G_{\beta\gamma}(x-x') = \delta_{\alpha\gamma}\delta(x-x') \qquad (4.5,1)$$

Für die Fourier-transformierte G-Funktion gilt:

$$G_{\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\; e^{-ip(x-x')}\,\tilde{G}_{\alpha\beta}(p) \qquad (4.5,2)$$

Mit /4.4,2/ folgt für $\tilde{G}_{\alpha\beta}(p)$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(p) = \frac{[(-\Gamma\not{p} + \delta\kappa_0)(-\Gamma\not{p} + \delta\mu_0)^2]_{\alpha\beta}}{(p^2 - \kappa_0^2 + i\varepsilon)(p^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon)^2} \qquad (4.5,3)$$

Bei den folgenden Berechnungen wird diese Greenfunktion nicht benutzt, sondern sie wird durch die nun folgende approximiert /Inversion von 4.3,2/ :

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(p) = \frac{(-\Gamma \not{p} + \delta\kappa_c)_{\alpha\beta}}{(p^2 - \kappa_c^2 + i\varepsilon)} \qquad (4.5,4)$$

wobei in 1. Näherung $\kappa_0 = 0$ gesetzt wird /Inversion von z.B. 4.,8/. In dieser Näherung erhalten wir somit die konventionelle Heisenberg-Theorie, jedenfalls soweit es die Greenfunktion betrifft. In /6.2,3/ wird gezeigt, wie durch die Wechselwirkung die $\tilde{G}_{\alpha\beta}(p)$-Funktion zur vollen $\tilde{G}_{\alpha\beta}(p)$ - Funktion angezogen wird.

4.6 Der Propagator $F_{\alpha\beta}(x-x')$

Der Propagator $F_{\alpha\beta}(x-x') = F(x-x')$ läßt sich aus dem gekoppelten Gleichungssystem für freie Felder berechnen. Für Gleichung /4.4,2/ lauten diese gekoppelten Gleichungen ohne Berücksichtigung des Wechselwirkungstermes:

$$\begin{aligned} (-i\not{\partial} + \mu)\, A(x) &= 0 \\ (-i\not{\partial} + \kappa)\, B(x) &= A(x) \\ (-i\not{\partial} + \mu)\, \Psi(x) &= B(x) \end{aligned} \qquad (4.6,1)$$

was der Feldgleichung $(-i\not{\partial} + \mu)^2 (-i\not{\partial} + \kappa)\, \Psi(x) = 0$ entspricht. Nach den allgemeinen kanonischen Quantisierungsvorschriften erhält man für die Felder A(x),B(x) und C(x) /B17/:

$$[A(x), \bar{\Psi}(x')]_{+}_{x^0=x^{0\prime}} = [B(x), \bar{B}(x')]_{+}_{x^0=x^{0\prime}} = [\Psi(x), \bar{A}(x')]_{+}_{x^0=x^{0\prime}} = \gamma^0 \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.6,2)$$

Alle anderen Vertauschungsrelationen sind gleich Null. Infolgedessen gilt:

$$[\Psi(x), \bar{\Psi}(x')]_{+}_{x^0=x^{0\prime}} = 0 \qquad (4.6,3)$$

Das Ψ-Feld ist also nichtkanonisch quantisiert. Bei Untersuchungen der Gleichung /4.6,1/ muß dies im folgenden beachtet werden. Pouradjam /D2/ hat gezeigt, daß die Lösungen des homogenen Systems /B17/

$$\begin{aligned} (-i\not{\partial} + \kappa)\, \Psi_c(x) &= 0 \\ (-i\not{\partial} + \mu)\, B_c(x) &= 0 \\ (-i\not{\partial} + \kappa)\, A_c(x) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.6,4)$$

unter den Transformationen

$$A_0(x) = A_0(x)$$

$$B_0(x) = B(x) + \frac{1}{\mu-\kappa} A_0(x) \qquad (4.6,5)$$

$$C_0(x) = C(x) + \frac{1}{\mu-\kappa} B_0(x) + \frac{1}{\mu(\mu-\kappa)} (\lambda - x^{\nu}\partial_{\nu}) A_0(x)$$

in die Gleichungen /4.6,1/ übergeführt werden.
Aus den Kommutatorrelationen für die Felder des homogenen Systems:

$$[A_0(x), \bar\Psi_0(x')]_+ = [\Psi_0(x), \bar A_0(x')]_+ = -i\, S(x-x',\mu)$$

$$[B_0(x), \bar B_0(x')]_+ = -i\, S(x-x',\kappa) \qquad (4.6,6)$$

mit

$$S(x,m) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \epsilon(p_0)\, \delta(p^2-m^2)\, \frac{-\not p + m}{m^2 - p^2}\, e^{-ipx}\, dp$$

und allen anderen Kommutatoren gleich Null erhält man unter den Transformationen /4.6,5/ folgende Kommutatorrelationen für die Felder des inhomogenen Systems:

$$[\Psi(x), \bar\Psi(x')]_+ = \frac{-i}{(\mu-\kappa)^2} S(x-x',\kappa) + \frac{i}{\mu(\mu-\kappa)}\{2\lambda - (x^{\nu}\partial_{\nu} - x'^{\nu}\partial'_{\nu})\} S(x-x',\mu$$

$$(4.6,7)$$

$$[B(x), \bar\Psi(x')]_+ = [\Psi(x), \bar B(x')]_+ = \frac{i}{\mu-\kappa}\left(S(x-x',\mu) - S(x-x',\kappa) \right)$$

$$[A(x), \bar\Psi(x')]_+ = [\Psi(x), \bar A(x')]_+ = -i\, S(x-x',\mu) \qquad (4.6,8)$$

$$[A(x), \bar A(x')]_+ = [A(x), \bar B(x')]_+ = [B(x), \bar A(x')]_+ = 0$$

Bei nichtkanonischer Quantisierung erhält man unter Berücksichtigung der Minimalregularisation /170/ schließlich für /4.6,7/:

$$[\Psi(x), \bar\Psi(x')]_+ = \frac{-i}{(\mu-\kappa)^2} S(x-x',\kappa) + \frac{i}{\mu(\mu-\kappa)}\left\{\frac{\mu}{\mu-\kappa} - \mu\frac{\partial}{\partial_{\mu}}\right\} S(x-x',\mu)$$

$$= F(x-x') \quad \text{wobei /4..23/ gilt.} \qquad (4.6,9)$$

4.7 Kommutatorrelationen für die Felder der Gleichung des Typs /4..10/ mit einem Diracdifferentialoperator höherer Ordnung

Im vorigen Abschnitt wurde von Gleichung /4.4,2/ ohne Berücksichtigung des Wechselwirkungstermes ausgegangen. Es wird im folgenden von den gekoppelten Gleichungen

$$(-i\not\partial + \lambda) A(x) = L^2 V \psi(\bar\psi \psi)$$

$$(-i\not\partial + \kappa) B(x) = A(x) \qquad (4.7,1)$$

$$(-i\not\partial + \mu) \psi(x) = B(x)$$

ausgegangen. Sie entsprechen der Feld-

gleichung

$(-i\not\partial + \mu)^2\ (-i\not\partial + \kappa)\ \psi = L^2\ V\ \psi(\bar\psi\ \psi)$. Führt man eine zu /30,31/ analoge Transformation mit

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x) \\ B(x) &= M(x) + \frac{1}{m-\mu}\, A(x) \\ \psi(x) &= -\frac{1}{m-\mu}\, M(x) + R(x) \end{aligned} \qquad (4.7,2)$$

durch, so erhält man das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (-i\not\partial + \mu)\ A(x) &= L^2\ V\ \psi(\bar\psi\ \psi) \\ (-i\not\partial + \kappa)\ M(x) &= L^2\ V\ \psi(\bar\psi\ \psi)\quad (-\frac{1}{m-\mu}\ ) \\ (-i\not\partial + \mu)\ R(x) &= -\frac{1}{(m-\mu)^2}\, L^2\ V\ (-i\not\partial + \mu)\ \psi(\bar\psi\psi) + \frac{L^2}{m-\mu}\ V\ \psi(\bar\psi\ \psi) \end{aligned} \qquad (4.7,3)$$

Werden /4.7,2/ in /4.6,8/ eingesetzt, so erhält man folgende gleiche Zeit Kommutatoren:

$$\begin{aligned} &[M,\bar R]_+ = [R,\bar M]_+ = [A,\bar M]_+ = [M,\bar A]_+ = 0 \\ &[A,\bar R]_+ = [R,\bar A]_+ = -i\ S(x-x',\mu) \\ &[M,\bar M]_+ = [B,\bar M]_+ = [M,\bar B]_+ = -i\ S(x-x',\kappa) \\ &[B,\bar R]_+ = [R,\bar B]_+ = \frac{i}{\mu - m}\ S(x-x',\mu) \\ &[\psi,\bar M]_+ = [M,\bar\psi]_+ = \frac{i}{\mu - m}\ S(x-x',\kappa) \\ &[\psi,\bar R]_+ = [R,\bar\psi]_+ = F(x-x') - \frac{i}{m-\mu}\ S(x-x',\kappa) \\ &[R,\bar R]_+ = \frac{i}{\mu-m}\ \left(\frac{1}{\mu-m} - \frac{\partial}{\partial\mu}\right)\ S(x-x',\mu) \end{aligned} \qquad (4.7,4)$$

Eine reine Geisterdarstellung erhält man aus /4.7,1/ mit

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A + \psi \\ \psi_2 &= A - \psi \end{aligned} \qquad (4.7,5)$$

Die gekoppelten Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} &1.\quad (-i\not\partial + \mu)\ \psi = B \\ &2.\quad (-i\not\partial + \kappa)\ B = \psi_1 - 2\psi + \chi = \psi_2 + \chi \\ &2'.\quad (-i\not\partial + \mu)\ \chi = L^2\ V\ \psi\ (\bar\psi\ \psi) \\ &3.\quad (-i\not\partial + \mu)\ \psi_2 = 0 \end{aligned} \qquad (4.7,6)$$

wobei

$$[\psi_1, \bar\psi_1]_{+}^{x_0 = x_0'} = -\,[\psi_2, \bar\psi_2]_{+}^{x_0 = x_0'} = 2\,\gamma^0\,\delta(\vec x - \vec x') \qquad (4.7,7)$$

Aus dem negativen Vorzeichen beim Antikommutator schließt man, daß ψ_2 ein Geisterfeld ist. Bei der Aufstellung von Hadron/Lepton - Geist/Quark - Modellen ist die Darstellung /4.7,6/ geeignet. Will man nicht nur die gleiche Zeit Kommutatoren aufstellen sondern auch die Kommutatoren für beliebige Abstände, so hat man zu beachten, daß die rechte Seite der Kommutatorrelationen keine c-Zahlen in diesem Falle sind.

Nach Roman /Abschnitt 3.2 von B17/ kann man für /4.7,3/ die folgende Ansätze unter symmetrischen Randbedingungen aufstellen.

$$A(x) = A(x)^f + \int i\ g_o\ S_F(x-y)\ L^2\ V\ \psi(y)\ (\ \bar{\psi}(y)\ \psi(y)\ )\ dy$$

$$M(x) = M(x)^f + \int i\ g_o\ S_F(x-y)\ (-\frac{1}{m-\mu})\ L^2\ V\ \psi(y)\ (\ \bar{\psi}(y)\ \psi(y)\ )\ dy$$

$$R(x) = R(x)^f + \int i\ g_o\ S_F(x-y)\ (-\frac{1}{(m-\mu)^2})(-i\not{\partial} + \mu)\ \blacksquare$$

$$\blacksquare\ L^2\ V\ \psi(y)\ (\ \bar{\psi}(y)\ \psi(y)\ )\ dy$$

$$+ \int i\ g_o\ S_F(x-y)\ (+\frac{1}{m-\mu})\ L^2\ V\ \psi(y)\ (\ \bar{\psi}(y)\ \psi(y)\ )\ d$$

(4.7,8)

In erster Näherung erhält man:

$$A(x) = A(x)^f$$
$$M(x) = M(x)^f \qquad (4.7,9)$$
$$R(x) = R(x)^f$$

Dieses Ergebnis haben wir bereits in /4.7,4/ bereits benutzt. Die höheren Näherungen kann man durch Iteration erhalten unter der Voraussetzung, daß perturbative Methoden angewandt werden können.

4.8 Der Propagator $F^{+}_{\alpha\beta}(x-x')$

Aus dem freien Propagator F(x-x') /4.6,9/ lassen sich auch andere Zweipunktfunktionen ausrechnen. Mit

$$F(x-x') = \langle 0 \mid T\ \psi(x)\ \psi^{*}(x') \mid 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(-\not{p}+\mu)^3\ (-\not{p}+\kappa)}{(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^3\ (p^2-\kappa^2+i\varepsilon)}\ e^{ip(x-x')}\ d^4p$$

erhält man

$$F^{+}(x-x') = \langle 0 \mid \psi(x)\ \psi^{*}(x') \mid 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^{+}} \frac{(-\not{p}+\mu)^3\ (-\not{p}+\kappa)}{(p^2-\mu^2)^3\ (p^2-\kappa^2)}\ e^{ip(x-x')}\ d^4p \qquad (4.8,1)$$

bzw. bei Betrachtung nicht nur der Nukleonenmasse, sondern auch des ganzen Baryonenspektrums und der kontinuierlichen Anteile in Analogie zu /4.3,1/:

$$F^{+}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^{+}} d^4p \int dm^2 \left\{ \frac{\rho_1(m^2)\ (-\not{p}+\mu)^3\ (-\not{p}+m) + \rho_2(m^2)(-\not{p}-\mu)^3\ (-\not{p}-m)}{(p^2-\mu^2)\ (p^2-m^2)} \right\} \qquad (4.8,2)$$

Das Berücksichtigen des gesamten Baryonenspektrums sowie der kontinuierlichen Anteile des Spektrums entspricht der ursprünglichen Heisenberg-Theorie, die kein Teilchen als „Eich"-Teilchen auszeichnet.

Spaltet man den Propagator von Formel /4.8,1/ analog zu Formel /4.6,9/ auf, so bekommt man:

$$F^{+}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^{+}} d^4p \left[\frac{(-\not{p}+\kappa)}{(\mu-\kappa)^2\,(p^2-\kappa^2)} - \frac{(-\not{p}+\mu)}{(\mu-\kappa)^2\,(p^2-\mu^2)} + \frac{(-\not{p}+\mu)^2}{(\mu-\kappa)\,(p^2-\mu^2)^2} \right] \qquad (4.8,3)$$

Führt man die nullte Integration unter Beachtung von $(\not{p}-\mu) = 2\mu \sum_{s=1}^{3} v_\alpha^s\, \bar{v}_\beta^s$ und analog für κ durch, so wird /4.8,3/ zu:

$$F^{T}(x-x') = -\frac{1}{(\mu-\kappa)^2}\sum_s\int\frac{d^3p}{w_\kappa}\kappa\langle 0|\psi(x)|p,s,n\rangle\langle p,s,n|\psi^{*}(x')|0\rangle\frac{i}{(2\pi)^3}$$

$$+\frac{1}{(\mu-\kappa)}\sum_s\int\frac{d^3p}{w_\mu}\mu\langle 0|\psi(x)|p,s,g\rangle\langle p,s,d|\psi^{*}(x')|0\rangle\frac{i}{(2\pi)^3}$$

$$+\frac{1}{(\mu-\kappa)}\sum_s\int\frac{d^3p}{w_\mu}\mu\langle 0|\psi(x)|p,s,d\rangle\langle p,s,g|\psi^{*}(x')|0\rangle\frac{i}{(2\pi)^3} \qquad (4.8,4)$$

mit $w_\kappa = (p^2+\kappa^2)^{0.5}$

$w_\mu = (p^2+\mu^2)^{0.5}$

und

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi(x)|p,s,n\rangle &:= v^s(p)\,e^{ip(\kappa)x}\\
\langle 0|\psi(x)|p,s,g\rangle &:= v^s(p)\,e^{ip(\mu)x}\\
\langle 0|\psi(x)|p,s,d\rangle &:= v^s(p)\,e^{ip(\mu)x}\left[\frac{1}{(\mu-\kappa)}-\frac{1}{2w_\mu^2}-\frac{\gamma^c}{2w_\mu}-\frac{ix^o}{w_\mu}\right]
\end{aligned} \qquad (4.8,5)$$

In diesem Falle kann der metrische Tensor (siehe auch /5.2,5/) in einen Diagonalteil und einen Nicht-diagonalteil aufgespalten werden:

$$\eta(p,s,r,p',s',r') = \delta_{pp'}\,\delta_{ss'}\,\eta_{rr'} \qquad (4.8,6)$$

wobei r = n,g,d d.h. den Zustand der physikalischen Fermionen, der Geister und Dipolgeister symbolisiert.
Der Nicht-diagonalteil sieht unter Beachtung von /4.8,5/ folgendermaßen aus:

$$\eta_{rr'} = \begin{pmatrix} \langle n|n\rangle & \langle n|g\rangle & \langle n|d\rangle \\ \langle g|n\rangle & \langle g|g\rangle & \langle g|d\rangle \\ \langle d|n\rangle & \langle d|g\rangle & \langle d|d\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.8,7)$$

Man bemerkt, daß die Skalarprodukte zwischen einem Geist- und einem anderen Geistzustand sowie zwischen einem Dipolgeist- und einem anderen Dipolgeistzustand Null sind. Man erkennt in dieser Form die Analogie zu den Verhältnissen in der Heisenbergschen Formulierung des Leemodells /81/. Die Zustände Geist und Dipolgeist sind Zustände der Norm Null, die nicht orthogonal aufeinander stehen. Der Zustand Geist ist Eigenzustand zur Energie, nicht aber der Zustand Dipolgeist. Man kann sich deshalb

vorstellen, daß die Projektion auf einen positiv definiten und insofern physikalischen Unterraum des Funktionalraumes /siehe Kapitel 5/ durch die Bedingung gewährleistet wird, daß die Zustände in diesem Unterraum Eigenzustände der Energie sein sollen. Die wesentliche Frage in diesem Zusammenhang ist, ob diese Vorschrift auf einen funktionalen Hilbertraum führt, der die Unitarisierung der S-Matrix /siehe Kapitel 10/ ermöglicht und eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation im üblichen Sinne erlaubt. Dieser physikalische Unterraum ist durch folgende Skalarprodukte definiert:

$$\eta^{Phy}_{rr'} = \begin{pmatrix} \langle n|n\rangle & \langle n|g\rangle \\ \langle g|n\rangle & \langle g|g\rangle \end{pmatrix} \qquad (4.8,8)$$

Dabei berücksichtigt man, daß die Geisterzustände nicht zur Norm beitragen.

4.9 Der Propagator im de-Sitterraum

Zur Untersuchung der Wirkung des gekrümmten Raumes auf die Feldgleichung des Systems /4.,10/ mit einem Diracdifferentialoperator der Form /4.4,3/ geht man von einem vereinfachten Fall aus. Betrachtet man eine Feldgleichung ohne Wechselwirkung /4.6,1/ und reduziert außerdem die Greenfunktion auf den einfachsten Fall /4.,4/, so erhält man in allgemein-relativistischer Verallgemeinerung /siehe hierzu 4.1,7/:

$$-i\phi^{-1}(x^2)\,[\not{\partial} + \frac{1}{4R^2}\,(\not{x})\,\eta_{\rho\nu}\phi^{-3}]\,\psi = 0 \qquad (4.9,1)$$

Durch das Auftreten des allgemein-relativistischen Termes in /4.9,1/ wird die Skaleninvarianz (vergleiche Abschnitt 4.1) verletzt und somit das Auftreten massiver Teilchen ermöglicht. Die Größe R in diesem Term stellt die fundamentale Länge dar, auf die sich sämtliche Längenmaßstäbe in der nichtlinearen Spinor-Feld-Theorie beziehen. Daraus resultiert unter anderem, daß die Kopplungskonstante dimensionslos ist /siehe 4.10/.

Das kontinuierliche und das Elementarteilchen-Spektrum lassen sich aus Gleichung /4.9,1/ ohne Schwierigkeiten berechnen.

Dabei ist das kontinuierliche Spekrum auf den Bereich

$$0 < \varkappa^2 R^2 - \frac{1}{2} < \infty \qquad (4.9,2)$$

und das diskrete Spektrum auf folgende Werte

$$\varkappa^2 R^2 = \frac{1}{2}\ , -\frac{5}{6}\ , -\frac{15}{6}\ , \ \ldots\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - n(n+2)\right) \qquad (4.9,3)$$

beschränkt. Bei $\varkappa^2 R^2 = \frac{1}{2}$ überschneiden sich beide Spektren. In diesem Punkt erhält man ein massives Teilchen der Masse

$$\kappa^2 = \frac{1}{2R^2} \qquad (4.9,4)$$

Da es nicht nur eine Masse, sondern auch die Fundamentallänge beinhaltet, erscheint die Bezeichnung „Metron" für dieses Teilchen sowie „Metronen" für die höheren Anregungszustände des Spektrums /4.9,3/sinnvoll.

Das Auftreten des Metronenspektrums in den Greenfunktionen und in dem Propagator für die Feldgleichungen des Typs /4.4,3/ bedingt eine Veränderung der Regularisierungseigenschaften der Geister. Dadurch wird eine Feinkorrektur bei der Berechnung des Elementarteilchenspektrums ermöglicht.

4.10 Die Dürr-Saller'sche Erweiterung der nichtlinearen Spinortheorie

Fassen wir die Entwicklung, die Anfangs dieses Kapitels wiedergegeben worden ist, nochmals in den wichtigsten Punkten zusammen:

Wir kamen von Gleichung /4.,2/ zu Gleichung /4.,6/ durch Verdopplung der Komponenten des Spinors. Dieses erfolgte, um auf nichttrivialer Weise zur $I=\frac{1}{2}$ -Darstellung des Isospins zu gelangen und um neben der Fermionenzahl auch die elektrische Ladung zu implementieren.

In Gleichung /4.,6/ haben wir es nach der Gürsey'schen Interpretation mit einem Isospinor-Weyl-Spinorfeld zu tun. Es ist darauf hinzuweisen, daß dadurch die Eindeutigkeit des quadrilinearen Wechselwirkungsterms durch die Verdopplung nicht verloren geht. Zwar lassen sich aus dem Isospinor-Spinorfeld zwei verschiedene Lorentz-kovariante ($\psi\psi$) Kombinationen bilden:

$$\hat{\phi} = \tilde{\psi}^{*} \tau \psi \quad ; \quad \tilde{\psi} = c_{\sigma} c_{\tau} \psi^{*T} \qquad \text{Isovektor-Skalarfeld} \qquad (4.10,1)$$

$$\phi_{\mu\nu} = i \tilde{\psi}^{*} \sigma_{\mu\nu} \psi \quad ; \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu}\sigma_{\nu} - \bar{\sigma}_{\nu}\sigma_{\mu}) \boxplus \tau' \quad \text{Isoskalar-Tensorfeld,} \qquad (4.10,2)$$

wobei bei dem ersten die Spin- (Isospin-), bei dem zweiten die Isospin- (Spin-) Freiheitsgrade antysymmetrisch (symmetrisch) verkoppelt sind, sowie zwei quadrilineare Wechselwirkungsterme

$$W_1 = \hat{\phi}^{*} \hat{\phi}$$
$$W_2 = \phi^{*}_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} \qquad (4.10,3)$$

doch verschwindet W_2, wodurch die Eindeutigkeit des quadrilinearen Wechselwirkungstermes wieder hergestellt ist. Die Begründung dafür ist, daß $\phi_{\mu\nu}$ und $\phi^{*}_{\mu\nu}$ Feldkonfigurationen mit entgegengesetzter Händigkeit sind ($\pm$ 1) und deshalb im Schwerpunktssystem, in dem ihre Impulse entgegengesetzt sind und sich deshalb nicht zu einer rotationssymmetrischen Konfiguration (Spin=0) ergänzen können.

Der Grund weshalb Heisenberg und Pauli zu der Gleichung /4.,2/ und später Heisenberg und Dürr zur Gleichung /4.,6/ und nicht zu einer Gleichung eines anderen Types gelangten, war die Forderung, die Gleichung solle derselben Symmetriegruppe unterliegen wie die masselose Diracgleichung $i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0$, nämlich:

$$G = U(1)_F \otimes SU(2)_I \qquad (4.10,4)$$

Aus diesem Grunde enthält die Gleichung automatisch zwei ladungsartige Erhaltungssätze.

Da es unmöglich war, in der Diracgleichung einen Massenterm proportional zu $m\psi$ einzuführen, ohne die Invarianz unter der Pauli-Gürsey-Transformation und der Touschek-Transformation zu zerstören, wurde die nichtlineare Spinorgleichung entwickelt.

Unter den fünf möglichen lorentzinvarianten Selbstwechselwirkungstermen eines antikommutierenden Diracfeldes (skalare, pseudoskalare, vektorielle, axialvektorielle und tensorielle Kopplung) erfüllte nur die Axialvektorkopplung die volle Symmetriegruppe. Dies führte Heisenberg und Pauli auf die G-invariante HP-Gleichung /4.,2/ bzw. Heisenberg und Dürr auf die HD-Gleichung /4.,4/ und /4.,6/.

Da aufgrund des Isospin-Freiheitsgrades an jedem Ort doppelt so viele Spinorfelder an einem Punkt angesiedelt werden können, ermöglicht der Ansatz $\chi \to \psi$ ein octolineares invariantes Produkt der Spinorfelder:

$$W^{(8)} = (\psi^*\sigma_{\mu}\psi)(\psi^*\sigma^{\mu}\psi)(\psi^*\sigma_{\nu}\psi)(\psi^*\sigma^{\nu}\psi) \qquad (4.10,5)$$

Siehe in diesem Zusammenhang auch die Erläuterungen im Abschnitt /4.2/.

Die Gruppe um Heisenberg hatte von Anfang an die Vermutung, daß die Asymmetrie des Grundzustandes mit Kräften langer Reichweite in Verbindung stehen müßte. 1961 konnte Goldstone /J. Goldstone Nuovo Cimento, 19, 154, 1961/ zeigen, daß im Falle eines asymmetrischen Grundzustandes eines nichtrelativistischen Vielkörpersystems Anregungsmoden existieren, deren Anregungsenergien mit zunehmender Wellenlänge dieser Moden nach Null streben.

Den Goldstone Moden der nichtrelativistischen Physik entsprechen nach Goldstone, Salam und Weinberg /Phys.Rev., 145, 1156, 196
in einer relativistischen Theorie Teilchen der Masse Null. Bei einer Isospin-Asymmetrie mußten diese Goldstone-Teilchen entsprechend dem Goldstone-Theorem notwendigerweise Skalarteilchen

(Spin=0) sein. Diese Schwierigkeit konnte dank R.W. Anderson /Phys.Rev., 130, 439, 1963/ überwunden werden, denn es gelang Anderson nachzuweisen, daß bei Existenz von Kräften langer Reichweite das Goldstone -Theorem außer Kraft gesetzt werden kann. Higgs verallgemeinerte diesen Sachverhalt auf relativistische Theorien. Er konnte nachweisen, daß durch eine Vergrößerung der globalen Symmetriegruppe, unter welcher der Grundzustand asymmetrisch ist, und durch die Einführung zugehöriger Masse-Null Vektor-Eichfelder das Goldstone-Theorem ungültig wird, d.h. die Masse Null-Goldstone-Teilchen treten nicht mehr auf und das Vektorfeld wird massiv. Allerdings verliert die ursprüngliche Symmetrie ihre physikalische Bedeutung nur dann nicht, wenn sie nicht-abelsch ist und nur teilweise durch die Asymmetrie des Grundzustandes gebrochen wird. Fordert man darüber hinaus, daß die Vektoreichfelder selbst nicht fundamenatal, sondern lokale Bindungszustände der Spinorfelder sind, so muß man versuchen, diese Konstrukte im Rahmen einer erweiterten nichtlinearen Spinortheorie zu erklären.

Die Konstruktion der Vektoreichfelder aus Spinorfeldern und - als Folge davon- die Isospineichinvarianz, d.h. die Invarianz unter einer lokalen Isospingruppe SU(2,loc) der HD-Gleichung konnten durch Dürr und Winter /Nuovo Cimento 70A, 467, 1970 und 7A, 461, 1972/ aufgezeigt werden. Um diese Konstruktion zu erreichen, mußten bestimmte Änderungen bei der Quantisierungsvorschrift vorgenommen werden.

Die Fortpflanzungsfunktion eines kanonischen Spinorfeldes wächst für kleine Abstände $z = x-x' \to 0$

$$\lim_{z \to 0} F(x-x') \sim z^{-3} \qquad (4.10,6)$$

Man erhält für die Felder die Dimension $\dim \psi = \frac{3}{2}$ (kanonisches Feld). Verwendet man ein solches Feld in der HD-Gleichung, so erhält man eine Kopplungskonstante L^2, die in der Tat die Dimension eines Längenquadrats haben muß, wodurch die Wechselwirkung nichtrenormierbar wird.

Durch das Verschwinden /1.,1/ der niedersten Momente der Spektralfunktion wird der Propagator bei kleinen Abständen regularisiert. Man erhält

$$\lim_{z \to 0} F(x-x') \sim z \qquad (4.10,7)$$

Die Dimension des Feldes wird zu $-\frac{1}{2}$ (stark subkanonisches Feld). Man erhält die Gleichung /4.,6/ mit einer Kopplungskonstante, die die Dimension eines Massenquadrates hat. Diese Wechselwirkung wird durch die Regularisierungsprozedur superrenormierbar. Diese Theorie zeitigt neben den bekannten Vorteilen einer superrenormierbaren Theorie auch große Widersprüche, z.B. das Verschwinden des Propagators und das Verschwinden des Antikommutators für kleine Abstände. Ein Ausweg aus diesem Dilemma war die Härtung der Wechselwirkung, indem der Propagator die folgende Abhängigkeit erhält:

$$\lim_{z \to 0} F(x-x') \sim z^{-1} \qquad (4.10,8)$$

und die Dimension des Spinorfeldes wird zu $\frac{1}{2}$ (subkanonisches Feld). Dies führt auf die HD-Gleichung /4.,6/, wobei diesmal die Kopplungskonstante dimensionslos ist. Die Theorie ist nun invariant unter Dilatationen und formal renormierbar. Prof. Dürr konnte nachweisen, daß in solch einer Theorie die folgenden Konstrukte auftreten:

$$A_\mu = - : \psi^* \sigma_\mu \vec{\tau} \psi : \qquad (4.10,9)$$

A_μ läßt sich als Isospin-Eichfeld interpretieren. Die Gleichung wird isospineichinvariant. Man erhält:

$$i \sigma^\mu \partial_\mu \psi + \sigma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} : \psi \, (\psi^* \sigma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \psi) : + \frac{3}{4} \sigma^\mu : \psi \, (\psi^* \sigma_\mu \psi) : = 0 \qquad (4.10,10)$$

Die innere Symmetriegruppe G ist dann

$$G = U(1)_F \otimes SU(2,\mathrm{loc})_I \qquad (4.10,11)$$

Versucht man nun, die Feldgleichung und die Quantisierungsbedingungen aus einer Lagrangedichte zu berechnen, so ergeben sich wegen der eingeprägten Länge einige Schwierigkeiten. Zielt man speziell auf eine lokale Lagrangedichte für das fundamentale Spinorfeld und beachtet man, daß man wegen des Pauliprinzips maximal nur vier 4-komponentige Spinorfelder an einem Ort ansiedeln kann, so erhält man:

$$\begin{aligned} X(x) &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)\psi_\gamma(x)\psi_\delta(x) \\ X^*(x) &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \psi^*_\alpha(x)\psi^*_\beta(x)\psi^*_\gamma(x)\psi^*_\delta(x) \end{aligned} \qquad (4.10,12)$$

Wegen der Invarianz der Fermionenzahlgruppe $U(1)_F$ muß das Pro-

dukt $X\ X^*$ aus beiden Ausdrücken gebildet werden.

Die Lagrangefunktion nimmt dann folgende Form an:

$$L(x) = X(x)\, X^*(x) = \frac{1}{4!} \det [\ \psi_a(x)\ \psi^*_{\dot a}(x)] \qquad (4.10,13)$$

wobei die Lagrangefunktion unter der Gruppe $G = U(1)_F \otimes SL(4,c,loc)$ invariant ist.

In einer quantisierten Theorie erfordert dies für kleine Abstände ξ des Propagators eine Laurententwicklung

$$T\ \psi(x+\tfrac{\xi}{2})\ \psi^*(x-\tfrac{\xi}{2}) = \underbrace{i\hbar\ (x,\xi)}_{\text{singulärer Term}} + \underbrace{:\psi\ \psi^*:(x) - :\psi\ \tfrac{\xi}{2} \overleftrightarrow{\partial}\ \psi^*: \cdots}_{\text{endliche Terme...}} \qquad (4.10,14)$$

In der Lagrangefunktion muß somit eine raum-zeitliche Auseinanderziehung vollzogen werden.

$$L(x) = \frac{1}{4} \lim_{\xi \to 0} \det [\ \psi_a(x+\tfrac{\xi}{2})\ \psi^*_{\dot a}(x-\tfrac{\xi}{2})\ ]$$

Die Punktaufspaltung (quasi lokale Näherung) hat zur Folge, daß sich die Lagrangefunktion formal in Differentialform umschreiben läßt. Man erhält zwei Anteile:

$$L_2 = \left(\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\xi^2}\right) [\ :\psi^* \tfrac{i}{2} \sigma \overleftrightarrow{\partial} \psi: + \frac{L^2}{2} :(\psi^* \sigma_\mu \psi)(\psi^* \sigma^\mu \psi): \ ]$$

mit L^2 dimensionlos

und

$$L_4 = L_4 [\ :(\psi^*\psi): ; :(\psi^*\psi)^2\ \psi^* \overleftrightarrow{\partial} \psi: ; :(\psi^*\psi)^2\ \partial(\psi^*\psi): ; :(\partial(\psi^*\psi))^2: \ ] \qquad (4.10,15)$$

Die Variation des ersten Termes führt auf die HD-Gleichung, der zweite Anteil ist von Dürr und Saller in letzter Zeit studiert worden und führt auf ein Modell, daß das fast alle Eigenschaften des GWS-Modells wiederspiegelt /H.P.Dürr ‚Radical Unification' MPI-PAE/PTh 49/81 und ‚General Space-Time Covariance in a Pure Spinor Theorie' MPI-PAE/PTh 38/82/.
Besonders interessant ist, daß man in solch einer Theorie zu einem Propagator in erster Näherung kommt, der mit unserem Propagator /4.8,1/ identisch ist. Es blieb in diesem Stadium der Theorie eine Schwierigkeit, nämlich den singulären Term in

/4.10,14/ auszuschalten bzw. in seiner Singularität zu begrenzen. Dazu wurde von Dürr die Lagrangefunktion umdefiniert:

$$L(x) = 4! \; : \det [\, \psi_\alpha \, \psi^*_\beta \,] : (x) \qquad (4.10,16)$$

Auf die Ähnlichkeit dieses Modells mit dem üblichen Glashow-Weinberg-Salam-Modell habe ich bereits hingewiesen. Im folgenden sollen die wichtigsten Unterschiede genannt werden.

- Es existiert im Dürr'schen Modell ein dritte-Ableitungs-Term des Urfeldes (wegen der Selbstkonsistenz mit der Dimension des Urfeldes).
- Das Higgsfeld kommt in verschiedenen Formen vor:

  $\phi \sim \psi \; \overset{+}{\tau} \; \psi$

  $\Phi_{\mu\nu} \sim \psi \; \sigma_{\mu\nu} \; \psi$
- Neben A_μ kommen weitere 'Gaugefelder' vor:

  $A^{\kappa\lambda}_\mu \sim : \psi \; \sigma_\mu \; \sigma^{\kappa\lambda} \; \psi :$

  $A^{\kappa\lambda}_\mu \sim : \psi \; \sigma_\mu \; \sigma^{\kappa\lambda} \; \overset{+}{\tau} \; \psi :$
- Gravitonen und Gravitinos können identifiziert werden
- Die kinetischen Terme der Higgsfelder haben verglichen mit dem Kanonischen Ansatz ein verändertes Vorzeichen
- Es gibt keine kinetischen Terme für die Gaugefelder $A_{\mu\nu} \, A^{\mu\nu}$. Dies hat zur Folge, daß keine W- und Z-Bosonen auftreten dürfen /H.Saller MPI-PAE/PTh 38/81/.

In dieser Arbeit werden wir uns auf die HD-Gleichung beschränken, die, wie wir gesehen haben, ein Teil des modernsten Ansatzes innerhalb der Spinortheorie ist /4.10,15/. Der unendliche Vorfaktor kann mit den üblichen Methoden eliminiert werden.

5. Die Funktionale Quantenfeldtheorie des nichtlinearen Spinorfeldes

Die Quantenfeldtheorie des nichtlinearen Spinorfeldes ist ein Versuch zur einheitlichen Beschreibung der Materie. Der Ausgangspunkt für alle Berechnungen innerhalb dieser Theorie ist Gleichung /4.4,1/. Die Berechnung von Observablen wie in den üblichen Kopplungstheorien ist im Rahmen der nichtlinearen Spinortheorie nicht möglich, da diese ausschließlich von Gleichung /4.4,1/ ausgeht und somit auf phänomenologisch ermittelte Massen und Kopplungskonstanten nicht zurückgreifen kann. Massen und Kopplungskonstanten sollen in einer selbstkonsistenten Prozedur aus der Feldgleichung /4.4,1/ berechnet werden.

Da kein Teilchen elementarer als andere sein soll, müssen alle Teilchen als zusammengesetzt betrachtet werden, als sogenannte Clusters. Insofern muß jedes Teilchen durch ein nichtlineares Funktional der Feldoperatoren dargestellt werden, welches durch seine Symmetrien und die Feldgleichung festgelegt ist. Ferner muß die Berechnung aller Observablen relativistisch invariant sein.

Funktionale werden in der Physik schon seit der Begründung der Mechanik durch Extremalprinzipien benutzt. In diesem Zusammenhang seien die Namen von Euler, Gauß und Lagrange genannt. In neuerer Zeit benutzte Volterra (1914) Funktionale, um Theorien systematisch aufzubauen /165/. Wiener /166/ benutzte ebenfalls Funktionale, um die Brownsche Bewegung zu beschreiben. Fock und Feynmann /167,168/ führten die Funktionale in die nichtrelativistische Quantentheorie ein sowie Schwinger /169/ in die Quantenfeldtheorie. Schwinger gelang es auch, durch Einführung von invarianten Feldfunktionalen Funktionalgleichungen zu entwickeln und diese auch zu lösen. Die analoge Entwicklung für die Spinortheorie, welche überhaupt die physikalische Interpretation der Feldgleichungen /4.,2;4.,4;4.,17;4.4,1/ ermöglichte, wurde von Stumpf /3,5,6,8,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,22,23,25/ vollzogen. Sie wird in den folgenden Abschnitten kurz erläutert.

5.1 Der Übergang zum Funktionalraum

Neben der Gleichung /4.4,2/ und der Vertauschungsrelation /4.,16/ müssen gewisse Symmetrierelationen im feldtheoretischen Hilbertraum erfüllt werden. Deshalb fordert man, daß der Zustandsraum ein Darstellungsraum der Symmetriegruppe sein soll /20/. So gilt für die Poincaretransformation analog zu /3.2,5/ mit P_μ und $M_{\eta\nu}$ eine Darstellung der infinitesimalen Generatoren $\mathbb{P}_\mu$ und $\mathbb{M}_{\eta\nu}$ der Poincaregruppe im feldtheoretischen Hilbertraum H:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\mu |a\rangle = p_\mu |a\rangle \\
&\mathbb{P}\,\mathbb{P}^\mu |a\rangle = m^2 |a\rangle \\
&\mathbb{W}_\mu \mathbb{W}^\mu |a\rangle = s(s+1)|a\rangle \\
&\mathbb{W}_3 |a\rangle = s_3 |a\rangle \qquad \text{mit} \\
&\mathbb{W}^\mu = \frac{1}{2m} \varepsilon^{\mu\rho\eta\nu} \mathbb{P}_\rho \mathbb{M}_{\eta\nu}
\end{aligned}
\tag{5.1,1}
$$

Bei kanonischen Vertauschungsrelationen kann die explizite Gestalt der P_μ und $M_{\eta\nu}$ korrespondenzmäßig übertragen werden, nicht jedoch bei nichtkanonischer Quantisierung /4/.

Ein vollständiger Satz kommutierender Observablen reicht zur Charakterisierung eines Zustandes nicht aus, da dafür zusätzlich Randbedingungen erforderlich sind. Diese werden mittels der S-Matrix eingeführt, da die S-Matrix den Übergang einlaufender in auslaufende Zustände beschreibt und somit die Randbedingungen beinhaltet.

Physikalisch wäre das Heisenberg-Stumpf-Dürr-Wagner-Modell gelöst, wenn die Konstruktion einer expliziten Darstellung des Feldoperators Ψ gelänge, die zudem /4.4,2/,/4.,16/ und /5.1,1/ genügen würde. Diese äußerst schwierige Aufgabe wurde lediglich im Falle sehr einfacher Modelle gelöst /20/. Zur Umgehung dieser schwierigen Konstruktion eines vollständigen Operatorsystems wurden in einem ersten Schritt Methoden entwickelt, um einzelne Zustände des Feldes relativistisch invariant zu charakterisieren. Man konstruiert die einzelnen Zustände $|a\rangle$ mit Hilfe ihrer Projektionen auf ein zyklisches Basissystem der Feldoperatoren. Ist $|a\rangle$ ein kausaler Zustand, so werden τ^+-Funktionen betrachtet, die folgendermaßen definiert sind:

$$
\tau^+_n \begin{pmatrix} \hat{1} \dots \hat{n} \\ a_1 \dots a_n \end{pmatrix} (x_1 \dots x_n |a) := \langle 0 | T\, \Psi_{a_1}(x_1) \dots \Psi_{a_n}(x_n) |a\rangle = \tau_n \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ a_1 \dots a_n \end{pmatrix} (x_1 \dots x_n |a) \tag{5.1,2}
$$

während für einen akausalen Zustand $|a>$ τ^--Funktionen betrachtet werden:

$$\tau^-_n\begin{pmatrix}x_1\ldots x_n\\ \alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix}|a) := <0|\,\bar{T}\,\psi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\psi_{\alpha_n}(x_n)|a> \qquad (5.1,3)$$

T und $\bar{T}$ sind dabei der Zeitordnugs- bzw. Antizeitordnungsoperator. Diese τ-Funktionen sind relativistisch invariant

$$\tau'^+_n\begin{pmatrix}x'_1\ldots x'_n\\ \alpha'_1\ldots\alpha'_n\end{pmatrix}|a) = L_{\alpha_1}^{\beta_1}(\Lambda)\ldots L_{\alpha_n}^{\beta_n}(\Lambda)\;\tau^+_n\left(\Lambda^{-1}(x'_1-d)_{\beta_1}\ldots\Lambda^{-1}(x'_n-d)_{\beta_n}\right)$$

$$=<0|\,T\,\psi_{\alpha_1}(x'_1)\ldots\psi_{\alpha_n}(x'_n)|a>' \qquad /20/ \qquad (5.1,4)$$

analog für τ'^-_n

$$\tau'^-_n\begin{pmatrix}x'_1\ldots x'_n\\ \alpha'_1\ldots\alpha'_n\end{pmatrix}|a) = <0|\,\bar{T}\,\psi_{\alpha_1}(x'_1)\ldots\psi_{\alpha_n}(x'_n)|a>' \qquad (5.1,5)$$

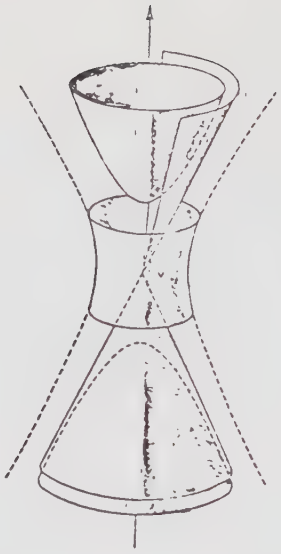
Eine Änderung im Zustandsraumsystem durch die Poincaregruppe führt zu einer Änderung der Erwartungswerte im Minkowskiraum /14/.

Zu Beginn diese Abschnittes führten wir die $\tau^\pm$-Funktionen aufgrund der Randbedingungen von kausalen und akausalen Zuständen ein. Dabei sind kausale Heisenbergzustände kausale Schrödingerzustände zur Zeit $t=0$ und akausale Heisenbergzustände akausale Schrödingerzustände zur Zeit $t=0$.

Hätte man die Antizeitordnung für akausale Zusände nicht eingeführt, so wären bei der Konstruktion des avancierten Zustandes Schwierigkeiten aufgetreten, denn die Inversion von /5.3,8/ mit dem akausalen Propagator erfordert wegen der Einheitlichkeit der Randbedingungen, daß man, wie es in /5.3,3/ angegeben ist, aus dem Zustand die akausalen Kontraktionen herauszieht. Die Verwendung der antizeitgeordneten Basis führt so auf die Wickregel für Antizeitordnung, und die Konstruktion von retardierten und avancierten Zuständen läßt sich in der $\tau^\pm$-Darstellung einheitlich formulieren, in dem Sinne, daß man aus den retardierten Zustand den entsprechenden avancierten Zustand erhält, wenn man im ersten überall die Zeitordnung durch die Antizeitordnung ersetzt.

Zur Berechnung der τ- Funktionen erweist sich der Funktionalformalismus als besonders günstig /169/. Ein weiterer Vorteil ist, daß sowohl die kanonische als auch die nichtkanonische Quantisierung besonders einfach dargestellt werden können. Ziel dieses Formalismus ist die Loslösung vom Begriff des Feldoperators und die Darstellung der Theorie allein durch die τ-Funktionen, deren Berechnung sich im Funktionalraum abspielt.

Abbildung 1



Graphische Darstellung der vektorwertigen Eigenwerte λ_p

Sollen die Eigenwertgleichungen (5.1.12) relativistisch invariant sein, so transformieren sie sich z.B. die erste Eigenwertgleichung wie folgt:

$$P_\mu U(0,A)|a> = \Lambda_{\mu\nu} P_\nu U(0,\Lambda)|a>$$

Der Satz all dieser vektorwertigen Eigenwerte λ_p ist eine dreidimensionale Hyperfläche im vierdimensionalen Raum der Vektoren p_μ. Die geometrischen Eigenschaften dieser Fläche hängen von dem Wert von p^2 und vom Vorzeichen von p^0 ab. Man erhält folgende Fälle:

i. $p^2>0$, $p^0>0$ Die Fläche ist der obere Teil eines zweiteiligen Hyperboloids
ii. $p^2>0$, $p^0<0$ der untere Teil des zweiteiligen Hyperboloids
iii. $p^2=0$; $p^0>0$ die obere Hälfte des Lichtkegels
iv. $p^2=0$, $p^0<0$ die untere Hälfte des Lichtkegels
v. $p^2<0$ der einseitige Hyperboloid.

5.2 Der Funktionalraum

Zur Formulierung der Quantentheorie mittels der Funktionale geht man von folgender Definition aus /11,12/:

Definition: Die funktionale Quantentheorie ist durch einen Isomorphismus vom Zustandsraum H der Quantentheorie in den Funktionalraum H_F gegeben: $H \to H_F$

Mit einem Satz geeigneter Basisfunktionale

$$|D_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{smallmatrix}\right)>| \qquad ; \quad 1 \le n < \infty \tag{5.2,1}$$

gilt

$$|D_n\left(\begin{smallmatrix} x_n \dots x_1 \\ a_n \dots a_1 \end{smallmatrix}\right)|^+ = |D_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{smallmatrix}\right)>|^+ \tag{5.2,3}$$

sowie mit dem erzeugenden Funktional

$$T(j,a)> := \sum_{n=1}^{\infty} \int T_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{smallmatrix}; a\right) |D_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{smallmatrix}\right)> \, d^4x_1 \dots d^4x_n \tag{5.2,3}$$

ist die isomorphe Abbildung gegeben durch
$|a> \rightarrow |T(j,a)>$.
Es werden folgende Konventionen getroffen:

1. $g_\alpha(z)\, f^\alpha(z) = \int g_\alpha(z)\, f^\alpha(z)\, d^4z$
   wobei z ein Punkt im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum und α unser Spinorindex sein soll.
2. $\hbar = c = 1$

Baut man die Basisfunktionale durch die funktionalen Erzeugungs- und Vernichteroperatoren $j_\alpha(x)$ und $\partial_\beta(x)$ auf, so genügen diese Operatoren folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[j(x), j(x')]_\pm = [\partial(x), \partial(x')]_\pm = 0$$
$$[j(x), \partial(x')]_\pm = \delta(x-x') \qquad (5.2,4)$$

Das + Zeichen steht hierbei für eine Fermionen- und das - Zeichen für eine Bosonenstatistik. Unter der Annahme, daß die Felder einer Fermionenwechselwirkung unterliegen, gelten für alle z folgende Antikommutatorrelationen:

$$[j_\alpha(z), j_\beta(z')]_+ = 0 = [\partial_\alpha(z), \partial_\beta(z')]_+$$
$$[j_\alpha(z), \partial_\beta(z')]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(z-z') \qquad (5.2,4')$$

wobei die Operatoren $j_\alpha(z)$ und $\partial_\beta(z)$ Erzeuger- und Vernichteroperatoren sind. Die Erzeugeroperatoren bilden eine Grassmannalgebra /siehe Anhang 1/ und die Antikommutatorrelationen eine Cliffordalgebra. Das Ausschließungsprinzip führt also im Gegensatz zu den Verhältnissen bei den Bosonen zu den Antivertauschungsrelationen zwischen Erzeuger- und Vernichteroperatoren.

In der hermiteschen Diracalgebra kann man eine der Tensoralgebra analoge Schreibweise verwenden. In dieser Schreibweise ist das spinorielle Skalarprodukt $\psi_\alpha\psi^\alpha$ unter einer Poincaretransformation invariant. Unter dieser Voraussetzung kann man schreiben:

$$\partial^\alpha(x) = \eta^{\alpha\beta}\, \partial_\beta(x)$$
$$j^\alpha(x) = \eta^{\alpha\beta}\, j_\beta(x) \qquad (5.2,5)$$

$\eta^{\alpha\beta}$ ist der metrische Tensor in dem hermiteschen Spinorraum
$\eta^{\alpha\beta} = 1 \otimes \eta^{\alpha'\beta'}$
Unter der Voraussetzung, der Funktionalraum ist ein Darstellungsraum der Poincaregruppe, erhält man folgende Transformationsei-

genschaften:

$$V^{-1}(\Lambda,d)\; j_\alpha(x')\; V(\Lambda,d) \;=\; L_\alpha{}^{\beta}(\Lambda)\; j_\beta(\Lambda^{-1}(x'-d))$$
$$V^{-1}(\Lambda,d)\; \partial_\alpha(x')\; V(\Lambda,d) \;=\; L_\alpha{}^{\beta}(\Lambda)\; \partial_\beta(\Lambda^{-1}(x'-d)) \qquad (5.2,6)$$

Anhand der Funktionaloperatoren wird ein funktionaler Fockraum definiert. Es sind

$$\partial_\alpha(x) \;=\; j_\alpha(x)^\dagger \quad ; \quad \partial_\alpha(x)^\dagger = j_\alpha(x) \quad ; \quad \partial^\alpha(x) = \frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)} \qquad (5.2.7)$$

wobei $\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}$ als Funktionalableitung verstanden werden soll.

Für den funktionalen Grundzustand $|\Phi_\varepsilon\rangle$ gilt:

$$\partial_\alpha(x)|\Phi_\varepsilon\rangle = 0$$

$$j_\alpha|\Phi_\varepsilon\rangle = \Phi_\alpha \qquad (5.2,8)$$

$V|\Phi_\varepsilon\rangle = |\Phi_\varepsilon\rangle$ d.h. der Grundzustand ist für alle Beobachter derselbe. Bei mehrmaliger Anwendung des Erzeugeroperators $j_\alpha(x)$ auf $|\Phi_\varepsilon\rangle$ erhält man einen funktionalen Hilbertraum in der Fockdarstellung:

$$|D_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{smallmatrix}\right)\rangle \;:=\; \frac{1}{n!}\; j_{\alpha_1}(x_1)\;\cdots\; j_{\alpha_n}(x_n)|\Phi_\varepsilon\rangle;\; 0\le n<\infty \qquad (5.2,9)$$

$$\langle D_n\left(\begin{smallmatrix}x_n\cdots x_1\\ \alpha_n\cdots\alpha_1\end{smallmatrix}\right)| \;:=\; \frac{1}{n!}\; \langle\Phi_\varepsilon|\; \partial_{\alpha_n}(x_n)\;\cdots\; \partial_{\alpha_1}(x_1) \qquad (5.2,10)$$

so daß /5.2,3/ gilt. Für das funktionale Skalarprodukt ergibt sich:

$$\langle D_n\left(\begin{smallmatrix}x_n\cdots x_1\\ \alpha_n\cdots\alpha_1\end{smallmatrix}\right)|\, D_m\left(\begin{smallmatrix}x'_1\cdots x'_m\\ \alpha'_1\cdots\alpha'_m\end{smallmatrix}\right)\rangle = \frac{1}{(n!)^2}\;\delta_{nm}\sum_{\lambda_1\cdots\lambda_m}(-1)^{P_\lambda}\;\cdot$$
$$\cdot\;\delta_{\alpha_{\lambda_1}\alpha_1}\,\delta(x_1-x'_{\lambda_1})\cdots\delta_{\alpha'_{\lambda_n}\alpha_n}\,\delta(x_n-x'_{\lambda_n}) \qquad (5.2,11)$$

wobei $(-1)^{P_\lambda}$ das Vorzeichen der jeweiligen Permutation ist. Wendet man die Erzeugungs- und Vernichteroperatoren auf diese Basis an, so erhält man:

$$j_{\alpha_{n+1}}(x'_{n+1})\,|D_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{smallmatrix}\right)\rangle = \frac{1}{n!}\; j_{\alpha_{n+1}}(x'_{n+1})\, j_{\alpha_1}(x_1)\cdots j_{\alpha_n}(x_n)|\Phi_\varepsilon\rangle \qquad (5.2,12)$$
$$= (-1)^n\;(n+1)\;\delta_{nn'}\;|D_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}x_1\cdots x_{n+1}\\ \alpha_1\cdots\alpha_{n+1}\end{smallmatrix}\right)\rangle$$

Die Anwendung eines Vernichtungsoperators auf Gleichung /5.2,9/ ergibt:

$$\partial_{\alpha'_n}(x'_n)\,|D_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{smallmatrix}\right)\rangle = \frac{1}{n!}\,\partial_{\alpha'_n}(x'_n)\; j_{\alpha_1}(x_1)\cdots\; j_{\alpha_n}(x_n)|\Phi_\varepsilon\rangle \qquad (5.2,13)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\;\delta(x'_n-x_l)\;|D_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\cdots x_{l-1}\,x_{l+1}\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\,\alpha_{l+1}\cdots\alpha_n\end{smallmatrix}\right)\rangle$$

Das funktionale Skalarprodukt lautet für den später benötigten Fall n=2 :

$$<D_2\left(\begin{matrix}x_2' & x_1'\\ \alpha_2' & \alpha_1'\end{matrix}\right)|D_2\left(\begin{matrix}x_1 & x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\right)> = \frac{1}{(2\pi)^2}<\phi_c|\,\partial_{\alpha_2'}(x_2')\;\partial_{\alpha_1'}(x_1')\;j_{\alpha_1}(x_1)\;j_{\alpha_2}(x_2)\,|\phi_0>$$

und unter Berücksichtigung von /5.2,8/

$$= \frac{1}{4}[\delta_{\alpha_1'\alpha_1}\delta(x_1'-x_1)\;\delta_{\alpha_2'\alpha_2}\delta(x_2'-x_2) - \delta_{\alpha_1'\alpha_2}\delta(x_1'-x_2)\;\delta_{\alpha_2'\alpha_1}\delta(x_2'-x_1)] \qquad (5.2,14)$$

wobei $<\phi_c|\phi_0>$ auf 1 normiert ist.

Eine Operatordarstellung, welche sowohl /5.2,4'/ als auch /5.2,6/ genügt, ist /20/

$$\underline{P}_\mu|T(j,a)> = p_\mu|T(j,a)>$$

$$\underline{P}^2|T(j,a)> = m^2|T(j,a)>$$

$$\underline{\Gamma}_\mu\underline{\Gamma}^\mu|T(j,a)> = s(s+1)|T(j,a)>$$

$$\underline{\Gamma}_3|T(j,a)> = s_3|T(j,a)> \qquad (5.2,15)$$

mit $\underline{P}_\mu = \int j_\alpha(x)\,P_\mu(x)\,\partial_\alpha(x)\,d^4x$

$\underline{M}_{\rho\sigma} = \int j_\alpha(x)\,M_{\rho\sigma}(x)\,\partial_\alpha(x)\,d^4x$ und

$\underline{G}_\mu = \frac{1}{2m}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\underline{P}_\nu\underline{M}_{\rho\sigma}$

Hierbei sind P_μ und $M_{\rho\sigma}$ die Generatoren der Poincaregruppe im feldtheoretischen Zustandsraum H.

Die S-Matrix im Funktionalraum ist dann durch

$$S_{mn} = (\,T(j,a^+(n))\,|T(j,a^-(m)\,) \qquad (5.2,16)$$

gegeben, mit

$$|\,T(j,a)>' = V(\Lambda,d)\;|\;T(j,a)> \quad \text{wobei } V(\Lambda,d)\subset H_F$$

5.2.1 Konstruktion des τ-Funktionalsystems aus dem |T(j,a)> - Funktional

Mit dem Hermite-Funktional

$$|T(j,a)\rangle = T\,U(j)\,|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \tau_n\left(\begin{matrix}x_1 \dots x_n\\ \alpha_1 \dots \alpha_n\end{matrix}\right) a_{\alpha_1}(x_1) \dots a_{\alpha_n}(x_n)\, D_n\left(\begin{matrix}x_1 \dots x_n\\ \alpha_1 \dots \alpha_n\end{matrix}\right)\rangle\, d^4x_1 \dots d^4x_n \qquad (5.2.1,1)$$

und dem Funktionaloperator

$$U(j) = e^{j_\alpha \Psi_\alpha} \qquad (5.2.1,2)$$

erhalten wir durch Anwendung von $\langle D_n\left(\begin{matrix}x_n \dots x_1\\ \alpha_n \dots \alpha_1\end{matrix}\right)|$ auf beiden Seiten der Gleichung /5.2.1,1/

$$\langle \Phi_0 |\, T\, \partial_{\alpha_n}(x_n) \dots \partial_{\alpha_1}(x_1)\, e^{j_\alpha \Psi_\alpha}\, |a\rangle \Big/_{j=0}$$

$$= \langle \Phi_0 |\, T\, \Psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \Psi_{\alpha_n}(x_n)\, |a\rangle \qquad (5.2.1,3)$$

$$= \tau_n\left(\begin{matrix}x_1 \dots x_n\\ \alpha_1 \dots \alpha_n\end{matrix}|a\right)$$

5.2.2 Konstruktion der dynamischen Gleichung für das |T(j,a)> - Funktional

Differentiation des |T(j,a)> - Funktionals nach einer Koordinate unter Berücksichtigung, daß der Zeitordnungsoperator im allgemeinen nicht mit dem Differentialoperator kommutiert, ergibt:

$$D_{\alpha\xi}\, \partial_\xi |T(j,a)\rangle = T\, D_{\alpha\xi}\, \Psi_\xi U(j)|a\rangle + i\rho_\xi\, j_\alpha\, |T(j,a)\rangle \qquad (5.2.2,1)$$

mit ρ_ξ gegeben durch /4.,16/. Da wegen der Antisymmetrie von $V_{\alpha\xi\gamma}$ das ⋆ -Produkt in Gleichung /4.4,2/ folgendermaßen geschrieben werden kann

$$:\Psi_\xi \Psi_\beta \Psi_\gamma \Psi_\delta: \;=\; V_{\alpha\xi\gamma\delta}\,[\, T\,\Psi_\xi \Psi_\beta \Psi_\gamma \Psi_\delta - 3\, F_{\beta\gamma}\, \Psi_\xi \,] \qquad (5.2.2,2)$$

mit $F_{\beta\gamma} = \langle 0|\, T\, \Psi_\beta \Psi_\gamma\, |0\rangle$

folgt für /4.4,2/ unter Berücksichtigung von /5.2.2,1/

$$\{ D_{\alpha\xi}\, \partial_\xi - i\rho_\alpha\, j_\alpha - V_{\alpha\xi\gamma\delta}[\, T\, \partial_\xi \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\delta - 3\, F_{\beta\gamma}\, \partial_\delta \,] \}\, |T(j,a)\rangle = 0 \qquad (5.2.2,3)$$

5.2.3 Konstruktion der dynamischen Gleichung für ein allgemeines Funktional $|Z(j,a)\rangle$

Durch Einsetzen der allgemeinen Transformation

$$|T(j,a)\rangle = e^{W(j)}\, |Z(j,a)\rangle \text{ in /5.2.2,3/ erhält man:}$$

$$\{ D_{\alpha\beta}(\partial_\beta H(j)) + D_{\alpha\beta}\partial_\beta - i\rho_0 j_\alpha$$
$$- V_{\alpha\beta\gamma\delta}[\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta + 3(\partial_\delta H(j))\partial_\beta\partial_\gamma + 3(\partial_\beta H(j))(\partial_\gamma H(j))\partial_\delta$$
$$+(\partial_\beta H(j))(\partial_\gamma H(j))(\partial_\delta H(j)) + 3[(\partial_\beta\partial_\gamma H(j)) - F_{\beta\gamma}][\partial_\delta + (\partial_\delta H(j))]$$
$$+ (\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta H(j))]\}|Z(j,a)> = 0 \qquad (5.2.3,1)$$

5.3 Konstruktion der dynamischen Gleichung für das ϕ- Funktionnesystem

Drücktman die τ- Funktionen durch die ϕ-Funktionen aus, die durch Kontraktion entstanden sind /B20/, so erhält man:

$$\tau\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_1\cdots y_m\\ 1\cdots m\end{matrix}\right) = \phi\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_1\cdots y_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}\right)$$
$$+ (-1)^P \phi\left(\begin{matrix}x_2\cdots x_n\\ \alpha_2\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_2\cdots y_m\\ \alpha_2\cdots\alpha_m\end{matrix}\right) F_{\alpha_1\beta_1}(x_1,y_1)$$
$$+ (-1)^P \phi\left(\begin{matrix}x_2\cdots x_n\\ \alpha_2\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_1 y_3\cdots y_m\\ \alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_m\end{matrix}\right) F_{\alpha_1\beta_2}(x_1,y_2)$$
$$+ \ldots.$$
$$+ (-1)^P \phi\left(\begin{matrix}x_3\cdots x_n\\ \alpha_3\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_3\cdots y_m\\ \alpha_3\cdots\alpha_m\end{matrix}\right) F_{\alpha_1\beta_1}(x_1,y_1) F_{\alpha_2\beta_2}(x_2,y_2$$
$$+ \ldots.$$
$$+ (-1)^P \phi\left(\begin{matrix}x_4\cdots x_n\\ \alpha_4\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_4\cdots y_m\\ \alpha_4\cdots\alpha_m\end{matrix}\right) \cdot$$
$$F_{\alpha_1\beta_1}(x_1,y_1) F_{\alpha_2\beta_2}(x_2,y_2) F_{\alpha_3\beta_3}(x_3,y_3)$$
$$+ \ldots \qquad (5.3,1)$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, ein aus einer sehr großen Zahl von Teilchen zusammengesetztes Elementarteilchen zu finden außerordentlich klein ist, so kann man jene Teile der gesamten Wellenfunktion vernachlässigen, die beinhalten, daß das Teilchen aus sehr vielen anderen besteht. In erster Näherung erhält man für die τ-Funktionen

$$\tau\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_1\cdots y_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}\right) = \phi\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_1\cdots y_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}\right) \qquad (5.3,2)$$

Aus der dynamischen Spinorfeldgleichung /5.2.3,1/ lassen sich nur endliche Resultate gewinnen, wenn der Antikommutator auf dem Lichtkegel verschwindet. Dies bedingt, daß der Term $i\rho_0 j(x)$ in der Funktionalgleichung verschwindet. Dadurch reduziert sich

das unendlich-dimensionale τ_n -Gleichungssystem zu einer Rekursionsformel. Wollen wir dem Verlust an Information Rechnung tragen, so transformiern wir die dynamische Gleichung nichtkanonisch und definieren einen Satz von transformierten Funktionalen

$$|T(j,a)> = e^{\frac{1}{2}\int j_1 F_{12}(x-y)\, j_2\, d^4x\, d^4y}\, |\phi(j,a)> \qquad (5.3,3)$$

bzw.

$$|\phi(j,a)> = e^{\frac{-1}{2}\int j_1 F_{12}(x-y)\, j_2\, d^4x\, d^4y}\, |T(j,a)> \qquad (5.3,4)$$

mit

$$|\phi(j,a)> = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \phi_n(^{x_1\cdots x_n}_{1\cdots n}|a)\; |D_n(^{x_1\cdots x_n}_{1\cdots n})>\, d^4x_1 \ldots d^4x_n \qquad (5.3,5)$$

Die erzeugenden Funktionale $|\phi>$ sind von größter Bedeutung. Bei Anwendung der dynamischen Gleichung auf unser $|T(j,a)>$ -Funktional erhalten wir für das τ -Funktionensystem im Fall der nichtkanonischen Quantisierung ($\rho_0 = 0$) nur ein rekursives Gleichungssystem. Dieses können wir nicht näherungsweise durch Abbrechen lösen. Deshalb sind wir zu dem ϕ-Funktionensystem übergegangen, für das ein nichtrekursives Gleichungssystem existiert. $F(x-y)$ ist die exakte zeitgeordnete Zweipunktfunktion des Spinorfeldes /6.2,4/; sie ist nicht bekannt. Infolgedessen nimmt man eine angenäherte F-Funktion unter der Annahme an, daß die Approximationen konvergieren. Es ist von Stumpf /3/ im analogen Fall des anharmonischen Oszillators nachgewiesen worden, daß die Approximationen konvergieren. Ob bei der nichlinearen Spinortheorie die Approximationen tatsächlich konvergieren, ist noch nicht bekannt.

Es sei noch erwähnt, daß alle Symmetriebedingungen beim Übergang vom $|T(j,a)>$-zum $|\phi(j,a)>$ -Funktional unverändert bleiben:

$$\begin{aligned}
&\underline{P}_\mu\, |\phi(j,a)> = p_\mu |\phi(j,a)> \\
&\underline{P}^2\, |\phi(j,a)> = m^2 |\phi(j,a)> \\
&\underline{\Gamma}_\mu \underline{\Gamma}^\mu |\phi(j,a)> = s(s+1)|\phi(j,a)> \qquad (5.3,6) \\
&\underline{\Gamma}_3\, |\phi(j,a)> = s_3 |\phi(j,a)>
\end{aligned}$$

Mit der speziellen Transformation /5.3,3/ erhält man aus /5.2.3,1/ mit $H(j) = \frac{1}{2}\int j(x)\, F(x-y)\, j(y)\, d^4x\, d^4y$ bei nichtkanonischer Quantisierung

$$\{D_{\alpha\beta}(\partial_\beta + F_{\beta\theta} j_\theta) - V_{\alpha\beta\gamma\delta}[\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta + 3(F_{\delta\tau} j_\tau)\partial_\beta\partial_\gamma + 3(F_{\beta\zeta} j_\zeta)(F_{\gamma\xi} j_\xi)\partial_\delta + (F_{\beta\sigma} j_\sigma)(F_{\gamma\omega} j_\omega)(F_{\delta\Omega} j_\Omega)]\}\,|\phi(j,a)\rangle = 0 \qquad (5.3,7)$$

Faßt man zusammen, so erhält man:

$$\{D_{\alpha\beta}\, d_\beta(x) - V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, d_\beta(x)\, d_\gamma(x)\, d_\delta(x)\}\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.3,7')$$
$$\text{mit } d_\beta(x) = \partial_\beta(x) + \int F_{\beta\theta}(x,x')\, j_\theta(x')\, d^4x'$$

Berücksichtigt man, daß

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} : d(x)\,d(x)\,d(x) : = V_{\alpha\beta\gamma\delta}[\,d(x)\,d(x)\,d(x) - 3\,F(0)\,d(x)\,]$$

wobei $F(0) = 0$ ist, so kann man die letzte Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$[\,D_{\alpha\beta}\, d_\beta(x) - V_{\alpha\beta\gamma\delta} : d_\beta(x)\, d_\gamma(x)\, d_\delta(x) :\,]\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.3,8)$$

Das Skalarprodukt hat die Form:

$$\langle a|b\rangle = (\,\phi(j,b)|\,\phi(j,a)\,) \qquad (5.3,9)$$

und die S-Matrix lautet

$$S_{mn} = (\,\phi(j,b^-(n))|\,\phi(j,a^+(m))\,) \qquad (5.3,10)$$

5.4 Die Symmetrien im ϕ - Funktionensystem

Fordert man außer /5.3,6/ noch Isospin- und Baryonenzahlerhaltung, so erhält man die Eigenwertgleichungen:

$$\underline{P}_\mu \underline{P}^\mu\,|\phi(j,a)\rangle = m^2\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.4,1)$$

$$\underline{P}^\mu\,|\phi(j,a)\rangle = p^\mu\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.4,2)$$

$$\underline{I}_\mu \underline{I}^\mu\,|\phi(j,a)\rangle = s[s+1]\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.4,3)$$

$$\underline{I}_3\,|\phi(j,a)\rangle = s_3\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.4,4)$$

$$\underline{\tau}_i \underline{\tau}^i\,|\phi(j,a)\rangle = I[I+1]\,|\phi(j,a)\rangle\ ;\ \underline{\tau}^3\,|\phi(j,a)\rangle = I_3\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.4,5)$$

$$\underline{B}_{\beta\gamma}\,|\phi(j,a)\rangle = b(a)\,|\phi(j,a)\rangle \qquad (5.4,6)$$

Dabei stellen die unterstrichenen Observablen Funktionalraumobservablen dar, die durch Observablen im gewöhnlichen Spinorraum dargestellt werden können:

$$\underline{\S} = \int dx\ j_\alpha(x)\ \S\ \partial_\alpha(x) \qquad (5.4,7)$$

wobei man beachtet, daß $B_{\beta\gamma} = (-i\lambda_2^i)_{\beta\gamma} = (-\lambda_2)_{\beta\gamma}$ der Baryonenzahloperator im gewöhnlichen Spinorraum ist und b(a) die

Baryonenzahl des Zustandes a ist.

Die Symmetrien, die der Theorie zugrunde liegen, werden im folgenden näher erläutert.

5.4.1 Die Baryoneneichgruppe

Multipliziert man Gleichung /5.4,5/ mit /5.2,3/ so ergibt sich:

$$\sum_{r=1}^{n} B_{\alpha_r \beta} \Phi(^{x_1 \dots x_r \dots x_n}_{\alpha_1 \dots \beta \dots \alpha_n}|a) = b(a)\ \Phi(^{x_1 \dots x_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}|a) \qquad (5.4.1,1)$$

Die Feldgleichung-Symmetrie gegenüber der Transformation /4.,34'/ kann zur Darstellung der Baryonenzahl im λ-Raum verwendet werden, da jede Symmetrie nach dem Noertherschen Theorem einem Erhaltungssatz, in diesem Falle der Erhaltung der Baryonenzahl, entspricht. Aufgrund der Gestalt der Matrix λ_2 /4.,18/ ist /4.,34'/ im Spin- und Isospinraum proportional der Identität. Daher wird nachfolgend /4.,34'/ nur als Transformation im λ-Raum betrachtet. Die entsprechende infinitesimale Transformation läßt sich schreiben:

$$\Psi(x) \rightarrow [\,1\!\!1 + i\varepsilon B\,]\ \Psi(x) \qquad (5.4.1,2)$$

wobei der hermitesche Operator B eingeführt wird, dessen Matrixdarstellung im λ-Raum durch

$$B_{\alpha\beta} = (-\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.4.1,3)$$

gegeben ist. Nach den Sätzen der Darstellungstheorie von Gruppen spannen die Eigenzustände von B den Darstellungsraum auf; identifiziert man den Operator B mit dem Operator der Baryonenzahl b, so erhält man für die niedrigsten Eigenzustände im λ-Raum die Darstellung:

$$B = 1: \quad \lambda^F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$B = -1: \quad \lambda^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad (5.4.1,4)$$

Dabei erfüllen die Zustände $\lambda^{(F,A)}$ (für Fermion und Antifermion) die Eigenwertgleichung:

$$B\ \lambda^{(F,A)} = \pm\ \lambda^{(F,A)} \qquad (5.4.1,5)$$

F weist in dieser Gleichung auf einen Fermionzustand hin und A auf einen Antifermionzustand. Bei Anwendung der unitären Transformation U* /4.,15/ auf B folgt als Darstellung:

$$\hat{B} = U^{*} B U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5.4.1,6)$$

wobei $\lambda^{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\lambda^{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (5.4.1,7)

Dabei erfüllen die Zustände $\lambda^{(F,A)}$ folgende Eigenwertgleichung:

$$\hat{B}\,\lambda^{(F,A)} = \lambda^{(F,A)} \qquad (5.4.1,8)$$

Bestimmt man die endliche Transformation nach /4.,34'/, dann erhält man:

$$U\, e^{\alpha_0 \lambda_2}\, U^{*} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_0} \end{pmatrix} \qquad (5.4.1,9)$$

d.h. die zweidimensionale Darstellung der Transformation zerfällt in zwei eindimensionale irreduzible Darstellungen, wie es für Abelsche Gruppen auch sein muß. Ferner ist die Transformation /4.,34'/ isomorph zu den Drehungen um eine feste Achse, die eine Abelsche Untergruppe der dreidimensionalen Drehungen bilden. Bezüglich der Darstellungen der dreidimensionalen Drehgruppe sind die Darstellungen dieser Abelschen Untergruppe reduzibel.

Die Zustände /5.4.1,4/ erfüllen die Orthogonalitätsrelation:

$$\lambda^{B}_{\alpha}\, \lambda^{B'*}_{\alpha} = \delta_{BB'} \qquad \text{mit} \{B,B'\} = \{F,A\} \qquad (5.4.1,10)$$

Um Zustände mit höheren Baryonenzahlen zu gewinnen, bildet man direkte Produkte aus den Zuständen /5.4.1,4/. Im Falle von zwei Fermionen mit den Baryonenzahlen $B = \pm 1$ sind für das Gesamtsystem nur die Baryonenzahlen $B = 0, \pm 2$ möglich. Die Basisvektoren zu diesen Konfigurationen lauten:

$$\begin{aligned} B=2 &: \quad \Lambda^{FF}_{\alpha\beta} = \lambda^{F}_{\alpha} \otimes \lambda^{F}_{\beta} \\ B=0 &: \quad \Lambda^{FA}_{\alpha\beta} = \lambda^{F}_{\alpha} \otimes \lambda^{A}_{\beta} \\ B=0 &: \quad \Lambda^{AF}_{\alpha\beta} = \lambda^{A}_{\alpha} \otimes \lambda^{F}_{\beta} \\ B=-2 &: \quad \Lambda^{AA}_{\alpha\beta} = \lambda^{A}_{\alpha} \otimes \lambda^{A}_{\beta} \end{aligned} \qquad (5.4.1,11)$$

Zur Baryonenzahl B=0 tragen also zwei orthogonale Basisvektoren bei.

Für drei Fermionen mit den Baryonenzahlen $B = \pm 1$ sind für das System nur die Baryonenzahlen $B = \pm 1, \pm 3$ möglich; die Basisvektoren lauten in diesem Fall:

$B= 3:\quad \Lambda^{FFF}$

$B= 1:\quad \Lambda^{FFA},\ \Lambda^{FAF},\ \Lambda^{AFF}$ (5.4.1,12

$B=-1:\quad \Lambda^{AAF},\ \Lambda^{AFA},\ \Lambda^{FAA}$

$B=-3:\quad \Lambda^{AAA}$

Unter Beachtung von /5.4.1,10/ gilt im allgemeinen

$$\Lambda^{K}_{\{\alpha\beta\ldots\}}\ \Lambda^{K'}_{\{\alpha\beta\ldots\}} = \delta_{KK'} \qquad (5.4.1,13$$

Die Zustände /5.4.1,11/ und /5.4.1,12/ spannen die Darstellungsräume für die Produktdarstellungen der Baryoneneichgruppe auf.

5.4.2 Die Isospingruppe

Für den Gesamtisospin und der dritten Komponente des Isospins gelten die Eigenwertgleichungen /5.4,5/. Multipliziert man mit /5.2,3/, so erhält man für den Gesamtisospin:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \vec{\tau}_{\alpha_r\alpha_{r'}}\vec{\tau}_{\alpha_s\alpha_{s'}}\Phi\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_r\ldots x_s\ldots x_n\\ \alpha_1\ldots\alpha_{r'}\ldots\alpha_{s'}\ldots\alpha_n\end{matrix}\middle|I\,I_3\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n} \vec{\tau}_{\alpha_r\alpha_{r'}}\vec{\tau}_{\alpha_r\alpha_{r''}}\Phi\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_r\ldots x_n\\ \alpha_1\ldots\alpha_{r''}\ldots\alpha_n\end{matrix}\middle|I\,I_3\right) = I[I+1]\,\Phi\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_n\\ \alpha_1\ldots\alpha_n\end{matrix}\middle|I\,I_3\right) \qquad (5.4.2,1)$$

und für die dritte Komponente des Isospins:

$$\sum_{r=1}^{n} \vec{\tau}^{3}_{\alpha_r\alpha_{r'}}\Phi\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_r\ldots x_n\\ \alpha_1\ldots\alpha_{r'}\ldots\alpha_n\end{matrix}\middle|I\,I_3\right) = I_3\ \Phi\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_n\\ \alpha_1\ldots\alpha_n\end{matrix}\middle|I\,I_3\right) \qquad (5.4.2,2)$$

und bei Projektion auf die Zweipunktfunktion ergibt sich (siehe auch /4.,9/):

$$I[I+1]\,\Phi\left(\begin{matrix}x_1 x_2\\ \alpha_1\alpha_2\end{matrix}\right) = -\frac{1}{4}\left(\vec{\tau}\otimes 1 - 1\otimes\vec{\tau}^{T}\right)^{2}_{\alpha_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_2'}\Phi\left(\begin{matrix}x_1' x_2'\\ \alpha_1'\alpha_2'\end{matrix}\right) \qquad (5.4.2,3)$$

Um den Isospin festlegen zu können, müssen Zustände zu einer bestimmten Baryonenzahl betrachtet werden. Will man Mesonen beschreiben, die als Bindungszustände von Nukleon-Antinukleonpaaren aufgefaßt werden, d.h. betrachtet man Zustände zur Baryonenzahl 0, so erhält man bei Projektion mit dem zu Λ^{FA} reziproken Zustand für die Zweipunktfunktion:

$$\Phi^{FA} = \Lambda^{FA*}\ \Phi\left(\begin{matrix}x_1 x_2\\ \alpha_1\alpha_2\end{matrix}\right) \qquad (5.4.2,4)$$

Wendet man Λ^{FA_*} auf /5.4.2,3/ unter Beachtung von /5.4.2,4/ an, so ernält man schließlich:

$$I[I+1]\phi^{FA}(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) = \frac{1}{4}(\vec{\tau}_{\alpha_1\alpha_1'}\delta_{\alpha_2\alpha_2'} - \delta_{\alpha_1\alpha_1'}\vec{\tau}_{\alpha_2\alpha_2'})^2 \quad \phi^{FA}(\alpha_1'^{\times_1'}\alpha_2'^{\times_2'})$$

$$= \frac{1}{2}(3|1|-\vec{\tau}\otimes\vec{\tau}^T)_{\substack{\alpha_1\alpha_1'\\ \alpha_2\alpha_2'}}\phi^{FA}(\alpha_1'^{\times_1'}\alpha_2'^{\times_2'}) \quad /\text{siehe } 4.,7/ \qquad (5.4.2,5)$$

Die Eigenfunktionen für diese Eigenwertgleichungen sind die sphärischen Paulimatrizen $\tau(I\,I_3)$, nach denen $\phi^{FA}(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2})$ entwickelt werden kann:

$$\phi^{FA,I\,I_3}(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) = \tau(I\,I_3)\quad\phi^{FA,I}(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) \qquad (5.4.2,6)$$

5.4.3 Die Spingruppe

Zur Untersuchung der Drehimpulsabhängigkeit der Zweipunktfunktion $\phi(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2})$ wird von den Nebenbedingungen /5.4,3/und/5.4,4/ ausgegangen. Die Eigenwertgleichungen lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$\underline{\Gamma}_\mu\underline{\Gamma}^\mu\;|\phi(j,a)> = [M_{23}^2 + M_{31}^2 + M_{12}^2]|\phi(j,a)> = s[s+1]|\phi(j,a)> \qquad (5.4.3,1)$$

bzw.

$$\underline{\Gamma}_3\;|\phi(j,a)> = M_{12}\;|\phi(j,a)> \qquad (5.4.3,2)$$

Die Projektion auf die Zweiteilchenamplitude ergibt:

$$s[s+1]\phi(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) = [\{\tilde{M}_{23}(x_1)+\tilde{M}_{23}(x_2)\}^2 + \{\tilde{M}_{31}(x_1)+\tilde{M}_{31}(x_2)\} + \{\tilde{M}_{12}(x_1)+\tilde{M}_{12}(x_2)\}]\;\phi(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) \qquad (5.4.3,3)$$

bzw.

$$s_3\;\phi(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) = [\tilde{M}_{12}(x_1) + \tilde{M}_{12}(x_2)]\,\phi(\alpha_1^{\times_1}\alpha_2^{\times_2}) \qquad (5.4.3,4)$$

Gleichung /5.4.3,3/ bezieht sich auf die räumlichen Komponenten. Der Übergang in das Schwerpunktssystem ergibt also ein nichtrelativistisches Problem. Dieses kann mit den Techniken behandelt werden, welche von der Drehgruppe her bekannt sind. Ferner zeigt /5.4.3,3/, daß sich der Gesamtspin des Mesons aus algebraischen Spinanteilen und dem Relativbahndrehimpuls des Teilchen-Antiteil-

chen-Systems (nach Abtrennung der Schwerpunktsbewegung) zusammensetzt.

$$\sum_{i=1}^{3} (\sigma_i \otimes 1\!\!1 - 1\!\!1 \otimes \sigma_i^T + L_i(x_1) + L_i(x_2))^2 \; \phi^{FA}(\overset{x}{\alpha}_1 \overset{x}{\alpha}_2) = j[j+1]\phi^{FA}(\overset{x}{\alpha}_1 \overset{x}{\alpha}_2) \qquad (5.4.3,5)$$

Es handelt sich demnach um ein System von drei Drehimpulsen, so daß die Form der Eigenfunktion zu bestimmtem Gesamtspin vom Kopplungsschema abhängt. Üblicherweise verwendet man Spin-Bahn-Kopplung, d.h. man setzt zuerst die beiden Einzelspins des Teilchen-Antiteilchen-Systems zusammen und koppelt den resultierenden Drehimpuls mit dem Relativbahndrehimpuls /34,36,37/. Koppelt man die Einzelspins, so erhält man analog zur Isospingruppe

$$s[s+1]\phi^{FA}(\overset{x}{\alpha}_1 \overset{x}{\alpha}_2) = \frac{1}{2} (3\,1\!\!1 \otimes 1\!\!1 - \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}^T)\, \phi^{FA}(\overset{x}{\alpha}_1 \overset{x}{\alpha}_2) \qquad (5.4.3,6)$$

5.4.4 Die Drehgruppe

Um Gleichungen z.B. für Vektormesonen zu erhalten, muß eine Partialwellenzerlegung vorgenommen werden. Da die Wellenfunktion ein Eigenzustand zu Γ^2, aber nicht zur Spinprojektion Γ_3 ist und bei der Ausreduktion der direkten Produkte von Bahndrehimpuls und Spinanteile Summationen über die Projektionsquantenzahlen vorkommmen, muß auf ein geeignetes Koordinatensystem transformiert werden, in dem die Wellenfunktion sowohl Eigenfunktion zu Γ^2 als auch zu Γ_3 ist. Dies erreicht man durch Transformation auf die sphärische Basis durch:

$$\hat{p}_{\mu'} = U^T_{\mu'} \, p^{\mu} \quad \text{mit}$$

$$U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.4.4,1)$$

U ist dabei unitär.

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Transformation sowie die später noch zu besprechende Ausreduktion nach Drehimpulsen für die in späteren Kapiteln berechneten Näherungen des Kontaktgraphen-Typus kaum von Bedeutung sind. Die in diesem Abschnitt noch zu behandelnden Überlegungen werden lediglich dazu führen,

daß man bestimmte Elementarteilchen-Quantenzahlkonfigurationen ausschließen kann.

Schreibt man die räumlichen Komponenten von p^μ auf Kugelkoordinaten um, so wird $\hat{p}^{\mu'}$ durch Kugelflächenfunktionen dargestellt:

$$\hat{p}^\mu = \bar{p}^\mu \sqrt{\frac{4\pi}{2\mu+1}}\; Y^{\mu\mu_3}(\theta,\Delta) \quad \text{mit} \tag{5.4.4,2}$$

$$Y^{\mu\mu_3}(\theta,\Delta) \;:=\; Y^{*}_{\mu\mu_3}(\theta,\Delta) \quad \text{und} \quad p^\mu = \begin{cases} p^\circ & \text{für } \mu=0 \\ |\vec{p}| & \text{für } \mu=1 \end{cases}$$

dabei kann (μ,μ_3) die Werte $(0,0;1,1;1,0;1,-1)$ annehmen.
Die Indices, welche sich auf die sphärische Basis beziehen, werden daher zweckmäßigerweise durch einen Doppelindex ersetzt.
Wird p^μ mit /5.4.4,2/ in die sphärische Basis transformiert, so folgt aus $p_\mu p^\mu = p_\mu\, U^\mu_{s\,s_3}\, U^{\dagger\, s\, s_3}_{\mu'}\, p^{\mu'} = p_{s\,s_3}\, p^{s\,s_3}$ (5.4.4,3)

für p_μ das Transformationsgesetz $p_\mu \to U^{T\,\mu}_{s\,s_3}\, p_\mu = p_{s\,s_3}$ (5.4.4,4)

Untere Indices werden also mit U^T transformiert, obere Indices mit $U^\dagger$. Bei der algebraischen Ausreduktion wurde für die Wellenfunktion eine Entwicklung der Form $\Phi = \sigma_\mu \Phi^\mu$ /5.4.2,6/ (5.4.4,5)
angenommen. Der Sinn der Transformation /5.4.4,4/ liegt nun darin, daß unter ihr die σ_μ in Eigenfunktionen zu s_3 übergehen:
Nach dem in /5.4.3/ Gesagtem hat der Operator s_3 die Form:

$$s_3 = \frac{1}{2}\,(\,|1| \otimes \sigma_3 \;-\; \sigma_3^T \otimes |1|\,) \tag{5.4.4,6}$$

Es lassen sich leicht die Beziehungen

$$\begin{aligned} s_3\, \sigma^{1,1} &= \sigma^{1,1} \\ s_3\, \sigma^{1,0} &= 0 \\ s_3\, \sigma^{1,-1} &= -\,\sigma^{1,-1} \end{aligned} \tag{5.4.4,7}$$

verifizieren. Hiermit ist gezeigt, daß man eine Eigenwertgleichung zu bestimmten Spinprojektionen bekommmt, wenn man die Transformation /5.4.4,1/ anwendet.

Mit Hilfe von $p_\mu\, p^\mu = p^\mu\, g_{\mu\nu} p^\nu = p_{r\,r_3}\, p^{r r_3}$
läßt sich der Fundamentaltensor in der sphärischen Basis definieren:

$$g^{s}_{rr_3,r'r'_3} := U^{T}_{rr_3}{}^{\mu'}\, g_{\mu'\nu'}\, U^{\nu'}_{r'r'_3} = \delta_{rr'}\ \delta_{r'_3,-r_3}\ (-1)^{1+r_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.4.4,8)$$

Mit /5.4.4,8/ können Indices gehoben und gesenkt werden:

$$p_{rr_3} = g_{rr_3,r'r'_3}\ p^{r'r'_3} := Y_{rr_3}(\theta,\Delta)\sqrt{\frac{4\pi}{2r+1}}\ p_r \qquad (5.4.4,9)$$

mit $p_r = (-1)^r p^r$

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt angegebenen Formeln kann die Eigenwertgleichung in die sphärische Basis geschrieben werden. Es müssen nur noch die Wellenfunktionen zu bestimmtem Gesamtspin konstruiert werden. Dazu werden Amplituden mit definiertem Drehimpuls und definierter Drehimpulsprojektion konstruiert. Im Ruhesystem haben sie die vom nicht-relativistischen Fall her bekannte Form. Wenn /5.4.3,5/ gilt, dann bilden $\vec{S}$ und $\vec{L}$ ein Paar von miteinander kommutierenden Drehimpulsoperatoren:

$$[S_j,S_k] = i\,\varepsilon_{jkl}\,S_l$$

$$[L_j,L_k] = i\,\varepsilon_{jkl}\,L_l \qquad (5.4.4,10)$$

$$[S_j,L_k] = 0$$

Die Eigenzustände zu $J^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2$ und $J_3 = L_3 + S_3$ ergeben sich mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Algebra aus den Eigenzuständen zu S^2, S_3, L^2 und L_3. Bei der Konstruktion von Eigenzuständen zu S^2 und S_3 werden Lösungen zu /5.4.3,1+5.4.3,2/

$$S^2\ \Phi(z) = s(s+1)\ \Phi(z) \qquad (5.4.4,11)$$

$$S_3\ \Phi(z) = s_3\ \Phi(z) \qquad (5.4.4,12)$$

gesucht. $\Phi(z)$ kann auf den sechzehn Elementen der Dirac-Algebra Γ aufgespannt werden. Diese ist dem direkten Produkt von zwei Pauli-Algebren isomorph:

$$\Gamma \cong \Sigma \otimes P \quad ; \quad \Sigma = \{\sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$$
$$P = \{\rho_0\ \rho_1\ \rho_2\ \rho_3\}$$

Wegen

$$\hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \sigma_i \otimes \rho_0 \qquad (5.4.4,13)$$

sind die Gleichungen /5.4.4,11+12/ diagonal in P. Daher genügt die Aufspannung von $\phi(z)$ auf Σ. Die Drehimpulsausreduktion ist somit unmittelbar auf den Weyl-Fall übertragbar. Lösungen zu /5.4.4,11/ sind:

$$\begin{matrix} \sigma_0 \quad \text{für } s = 0 \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad \text{für } s = 1 \end{matrix} \qquad (5.4.4,14)$$

σ_0 ist auch eine Lösung von /5.4.4,12/ zu s=0. Für s=1 geht man zur sphärischen Basis über. Dazu bedient man sich der Transformation

$$\sigma_{1s_3} = U_{s_3 i}\, \sigma_i \qquad (5.4.4,15)$$

mit der unitären Matrix gegeben durch /5.4.4,1/.

σ_{1s_3} ist dann Lösung von /5.4.4,12/ zum Eigenwert s_3.

Die Eigenfunktionen von L^2 und L_3 sind die bekannten Kugelflächenfunktionen $Y_{ll_3}(\Omega_z)$ zu den Eigenwerten $l(l+1)$ und l_3. Eigenfunktionen zu S^2, S_3, L^2 und L_3 sind demnach:

$$\phi_{ss_3 ll_3}(z) = \sigma_{ss_3}\, Y_{ll_3}(\Omega_z)\, f_{ss_3 ll_3}(z_0, |\vec{z}|) \qquad (5.4.4,16)$$

Mit Hilfe von Clebsch-Gordan-Koeffizienten konstruiert man hieraus Eigenfunktionen zu J^2, J_3, S^2 und L^2.

Relativistisch sind im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall S^2 und L^2 nicht getrennt Konstanten der Bewegung. Man muß also über die Eigenwerte dazu summieren. Somit erhält man:

$$\phi^{sl}_{jj_3}(z) = \sum_{\substack{ss_3 \\ ll_3}} \langle ss_3 ll_3 | jj_3 \rangle\, \sigma_{ss_3}\, Y_{ll_3}(\Omega_z)\, \phi^{sl}_{jj_3} \qquad (5.4.4,17)$$

Die Umkehrung von /5.4.4,17/ ergibt sich leicht mittels der bekannten Orthogonalitätsrelationen. Unter Beachtung von

$$\bar{\sigma}_{ss_3} = (-1)^s\, \sigma_{ss_3} \quad \text{ergibt sich:}$$

$$\phi^{sl}_{jj_3}(z_0, |\vec{z}|) = \sum_{s_3 l_3} \langle ss_3 ll_3 | jj_3 \rangle \int d\Omega_z\, Y^*_{ll_3}(\Omega_z)\, Sp(\bar{\sigma}_{ss_3}\, \phi_{jj_3}(z)) \qquad (5.4.4,18)$$

Ein anderer Ausdruck für $\Phi_{jj_3}(z)$ kann mit Hilfe der Vektorkugelflächenfunktionen $Y_{(jlj_3)i}(\Omega_z)$ gewonnen werden. Diese sind definiert durch:

$$
\begin{aligned}
Y_{(jlj_3)1} &= \frac{-1}{\sqrt{2}^{\tau}} \langle 11\, l\, j_3-1 | jj_3\rangle\, Y_{l\, j_3-1} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}^{\tau}} \langle 1\,-1\, l\, j_3+1 | jj_3\rangle\, Y_{l\, j_3+1} \\
Y_{(jlj_3)2} &= \frac{-i}{\sqrt{2}^{\tau}} \langle 11\, l\, j_3-1 | jj_3\rangle\, Y_{l\, j_3-1} \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2}^{\tau}} \langle 1\,-1\, l\, j_3+1 | jj_3\rangle\, Y_{l\, j_3+1} \\
Y_{(jlj_3)3} &= \langle 10\, l\, j_3 | jj_3\rangle\, Y_{l\, j_3}
\end{aligned}
\qquad (5.4.4,19)
$$

Unter Verwendung der Matrix U werden diese Gleichungen zusammengefaßt:

$$
Y_{(jlj_3)i} = \sum_{s_3} U^{+}_{i s_3} \langle 1 s_3\, l\, j_3-s_3 | jj_3\rangle\, Y_{l\, j_3-s_3} \qquad (5.4.4,20)
$$

Aus /5.4.4,17/ folgt dadurch ein anderer Ausdruck für die Amplitude

$$
\begin{aligned}
\Phi_{jj_3}(z) = Y_{jj_3}\, \Phi^{0j}_{jj_3} + \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \Big[& Y_{(j\,j-1\,j_3)i}\, \Phi^{i\,j}_{j\,j_3} \\
& + Y_{(jjj_3)i}\, \Phi^{1\,j}_{j\,j_3} \\
& + Y_{(j\,j+1\,j_3)i}\, \Phi^{1\,j+1}_{j\,j_3} \Big]
\end{aligned}
\qquad (5.4.4,21)
$$

$\Phi_{jj_3}(z)$ wird also durch vier reduzierte Matrixelemente $\Phi^{sl}_{jj_3}(z_o, |\vec{z}|)$ ausgedrückt. Für j=0 verschwinden $\Phi^{1\,j-1}_{j\,j_3}$ und $\Phi^{1\,j}_{j\,j_3}$ (vgl. Clebsch-Gordan-Koeffizienten). Für skalare Mesonen braucht man demnach nur zwei reduzierte Matrixelemente zu berechnen.

Die Parameter s und l haben im relativistischen Fall keine unmittelbar anschauliche physikalische Interpretation; s stellt nicht den (algebraischen) Spin und l nicht den Bahndrehimpuls dar. Beim Einteilchenzustand bleiben diese Begriffe ohne Sinn, nicht jedoch bei einem Streuproblem mit zwei auslaufenden Teilchen.

Für Weyl-Spinoren ist das Problem der Drehimpulsausreduktion mit /5.4.4,21/ erledigt; für Diracspinoren müssen hingegen die reduzierten Matrixelemente noch auf der Algebra P aufgespannt werden. Der Zusammenhang zwischen der Algebra P und

der Dirac-Algebra ergibt sich aus folgenden Beziehungen (in der Darstellung mit γ_5 diagonal):

$$1 = 1 \otimes 1 \; ; \quad \gamma_0 = 1 \otimes \rho_1 \; ; \quad \gamma_5 = 1 \otimes \rho_3 \; ; \quad \gamma_0\gamma_5 = 1 \otimes \rho_1\rho_3 \qquad (5.4.4,22)$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} = \sigma_i \otimes 1 \; ; \quad \gamma_i\gamma_5 = \sigma_i \otimes \rho_i \; ; \quad \sigma_{0i} = \sigma_i \otimes \rho_3 \; ;$$

$$\gamma_i = \sigma_i \otimes \rho_1\rho_3 \qquad (5.4.4,23)$$

Insgesamt ergibt also die Zerlegung von $\Phi(z)$ nach der Dirac-Algebra unter Beachtung von /A4.5,16 ff/

$$\Phi(z) = S(z) + \gamma_5 P(z) + \gamma_0 V(z) + \gamma_0\gamma_5 A(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\{\gamma_i V_i(z) + \gamma_i\gamma_5 A_i(z) + \sigma_{0i} U_i(z) + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} T_i(z)\} \qquad (5.4.4,25)$$

In dieser Gleichung sind die „skalaren" Amplituden (erste Zeile) einer Kugelflächenfunktion wie

$$S(z) = Y_{(j\,j-1\,j_3)i}(\Omega_z)\, s_{jj_3}(z_0,|\vec{z}|) \text{ proportional, für die} \qquad (5.4.4,26)$$

„vektoriellen" Amplituden (zweite Zeile) gilt eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen, z.B.

$$V_i(z) = Y_{(j\,j-1\,j_3)i}(\Omega_z) v^{-}_{jj_3}(z_0,|\vec{z}|) + Y_{(jjj_3)i}(\Omega_z)\, v^{+}_{jj_3}(z_0,|\vec{z}|) + Y_{(j\,j+1\,j_3)}(\Omega_z)\, v^{+}_{jj_3}(z_0,|\vec{z}|) \qquad (5.4.4,27)$$

Man erhält die Gleichungen für die Weyl-Amplituden aus denen für die Diracamplituden, indem man den Sektor (V_i, A_i) oder (A_i, V_i) betrachtet. Dabei gelten die bisherigen Überlegungen nur im Ruhesystem

$$J_- = (m,0,0,0). \qquad (5.4.4,28)$$

5.4.5 Die diskreten Symmetrien

Die diskreten Symmetrien werden analog zu den vorher genannten Symmetrien behandelt. So lautet das Transformationsgesetz des Feldoperators für die Raumspiegelung $\bar{x} = i_s x = (x_0, -x)$ folgendermaßen:

$U(i_s)\ \psi(x)\ U^{-1}(i_s) = \gamma_0\ \psi(\bar{x})$, mit einer willkürlichen (5.4.5,1)
Phasenwahl. Der entsprechende Operator P, der auf die τ -Funktion wirkt, ergibt sich aus /5.4.5,1/ zu :

$P\ \tau(x_1, x_2) = \gamma_0\ \tau(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\ \gamma_0$ (5.4.5,2)

Hat der Zustand eine bestimmte Parität η_p, so erhält man aus /5.4.5,2/ eine Eigenwertgleichung, die für Relativwellenfunktionen lautet:

$P\ \phi(z) = \gamma_0\ \phi(\bar{z})\ \gamma_0 = \eta_p\ \phi(z)$ (5.4.5,3)

Diese Gleichung gilt nur im Ruhesystem.

Ferner lautet das Transformationsgesetz für die Ladungskonjugation:

$U(i_c)\ \psi(x)\ U^{-1}(i_c) = C\ \bar{\psi}^T(x)$ /siehe 4.,36/ (5.4.5,4)

wieder mit einer willkürlichen Phase. Die Eigenwertgleichung für einen Zustand mit definierter Ladungsparität η_c nimmt im Ruhesystem die Form an :

$C\ \phi(z) = C\ \phi^T(-z)\ C^{-1} = \eta_c\ \phi(z)$ (5.4.5,5)

Statt C wird im folgenden die kombinierte Operation CP behandelt, die auch für Weyl-Spinoren eine definierte Symmetrie darstellt. Die entsprechende Eigenwertgleichung ist:

$PC\ \phi(z) = C\ \gamma_0\ \phi^T(-z_0, z)\ \gamma_0\ C^{-1} = \eta_c\ \eta_p\ \phi(z)$ (5.4.5,6)

Die Gleichungen /5.4.5,5+6/ gelten nur für die neutralen Teilchen eines Isospin-Multipletts; für die geladenen Teilchen muß C durch die G-Parität ersetzt werden /4.,36/. Eine Formulierung der diskreten Symmetrien direkt durch Funktionale ist bisher nicht angegeben worden.

Im Abschnitt /5.4.4/ erhielt man nach der Drehimpulsausreduktion im Dirac-Fall ein System von sechzehn gekoppelten Gleichungen. Nachfolgend wird untersucht, inwieweit dieses System durch die diskreten Symmetrien Parität und Ladungskonjugation in mehrere kleinere Systeme zerfällt. Beachtet man, daß γ_0 in Σ die Einheitsmatrix ist, so genügt die Betrachtung der ρ - Matrizen. Mit Hilfe der bekannten Vertauschungsrelationen der Pauli-Matrizen können die Elemente der Dirac-Algebra unter der Wirkung von

γ_0 & γ_5 klassifiziert werden:

$$\Gamma_g = \{1, \gamma_0, \gamma_j \gamma_5, \sigma_{jk}\}$$
$$\Gamma_u = \{\gamma_5, \gamma_0 \gamma_5, \gamma_j, \sigma_{0j}\} \qquad (5.4.5,7)$$

mit

$$\gamma_0 \Gamma_g \gamma_0 = \Gamma_g$$

und

$$\gamma_0 \Gamma_u \gamma_0 = -\Gamma_u$$

Im ortsabhängigen Teil werden nur die Winkel geändert. Die Paritäten der skalaren und vektoriellen Kugelflächenfunktionen sind:

$$Y_{ll_3}(-\Omega) = (-1)^l Y_{ll_3}(\Omega) \qquad (5.4.5,8)$$

$$Y_{(jlj_3)j}(-\Omega) = (-1)^l Y_{(jlj_3)j}(\Omega) \qquad (5.4.5,9)$$

Aus Gleichungen /5.4.5,7 bis 9/ ergeben sich leicht die Paritäten der sechzehn Amplituden. Man hat acht Amplituden für die Parität $\eta_p = (-1)^j$ (natürliche Parität)

$$s_{jj_3},\ v^{0j}_{jj_3},\ a^{1j}_{jj_3},\ t^{1j}_{jj_3},\ v^{1j+1}_{jj_3},\ v^{1j-1}_{jj_3},\ u^{1j+1}_{jj_3},\ u^{1j-1}_{jj_3} \qquad (5.4.5,10)$$

und weitere acht Amplituden für die unnatürliche Parität $\eta_p = (-1)^{j+1}$:

$$p_{jj_3},\ a^{0j}_{jj_3},\ v^{1j}_{jj_3},\ u^{1j}_{jj_3},\ a^{1j+1}_{jj_3},\ a^{1j-1}_{jj_3},\ t^{1j+1}_{jj_3},\ t^{1j-1}_{jj_3} \qquad (5.4.5,11)$$

Aufgrund der Parität zerfällt also das System von sechzehn Gleichungen in zwei Systeme zu je acht Gleichungen.

Als zweite diskrete Symmetrie wird PC betrachtet, d.h. Gleichung /5.4.5,6/. In diesem Fall kann der algebraische Teil des Problems nicht einfach in der Σ- oder P-Algebra diskutiert werden, sondern es muß ganz Γ betrachtet werden. Auch hier gibt es eine Aufspaltung in gerade und ungerade Elemente:

$$\Gamma'_g = \{1, \gamma_j, \gamma_j \gamma_5, \sigma_{0j}\} \qquad (5.4.5,12)$$

$$\Gamma'_u = \{\gamma_5, \gamma_0, \gamma_0 \gamma_5, \sigma_{jk}\} \qquad (5.4.5,13)$$

mit $C \gamma_0 \Gamma'^T_g \gamma_0 C^{-1} = \Gamma'_g$ und

$$C \gamma^0 \Gamma'^T_u \gamma^0 C^{-1} = -\Gamma'_u \ ,$$

Was den ortsabhängigen Teil angeht, müssen die Amplituden als gerade oder ungerade unter Vorzeichenänderung der Relativzeit

z_o klassifiziert werden; dazu verwendet man den Index „g" bzw. „u". Aus /5.4.5,12/ und /5.4.5,13/ bekommt man dann die Amplituden, die einem definierten PC-Eigenwert des Zustandes entsprechen. Unter Berücksichtigung von /5.4.5,10+11/ erhält man unter Weglassen des Index jj, für $\eta_p=(-1)^j$ und $\eta_p\,\eta_c = +1$ die Amplituden:

$$s_g,\ v_u^{0j},\ a_g^{1j},\ t_u^{1j},\ v_g^{1j+1},\ v_g^{1j-1},\ u_g^{1j+1},\ u_g^{1j-1} \qquad (5.4.5,14)$$

und für $\eta_p=(-1)^j$ und $\eta_p\,\eta_c=-1$

$$s_u,\ v_g^{0j},\ a_u^{1j},\ t_g^{1j},\ v_u^{1j+1},\ v_u^{1j-1},\ u_u^{1j+1},\ u_u^{1j-1} \qquad (5.4.5,15)$$

Für $\eta_p= (-1)^{j+1}$ und $\eta_p\,\eta_c = +1$ erhält man folgende Amplituden:

$$p_u,\ a_u^{0j},\ v_g^{1j},\ u_g^{1j},\ a_g^{1j+1},\ a_g^{1j-1},\ t_u^{1j+1},\ t_u^{1j-1} \qquad (5.4.5,16)$$

und für $\eta_p= (-1)^{j+1}$ und $\eta_p\,\eta_c = -1$

$$p_g,\ a_g^{0j},\ v_u^{1j},\ u_u^{1j},\ a_u^{1j+1},\ a_u^{1j-1},\ t_g^{1j+1},\ t_g^{1j-1} \qquad (5.4.5,17)$$

Die PC-Invarianz bewirkt also nicht das weitere Zerfallen des Gleichungssystems, sondern erlaubt die Beschränkung der Variablen z_o auf positive Werte, anders als im Streuproblem.

Für einen gegebenen Spin j gibt es vier verschiedene Lösungen mit den Eigenwerten $\eta_p= \pm 1$ und $\eta_p\,\eta_c= \pm 1$. Der Zusammenhang dieser Zustände mit denen, die man aus dem nichtrelativistischen Quark-Modell (wo man eine spektroskopische Notation benutzt) erhält, werden im folgenden besprochen. Von grundlegender Bedeutung dabei ist die Äquivalenz der PC-Transformation mit dem Austausch der Spins im Teilchen-Antiteilchen-System. Unter Spinaustausch symmetrische Zustände sind Triplett-Zustände, antisymmetrische Zustände sind Singlett-Zustände. Es gilt:

$\eta_p\,\eta_c = +1$ Triplett-Zustände

$\eta_p\,\eta_c = -1$ Singlett-Zustände

Die Parität eines Zustandes ist nichtrelativistisch durch $-(-1)^l$ gegeben, wobei l der Bahndrehimpuls ist. Das zusätzliche - stammt von der unterschiedlichen inneren Parität von Teilchen und Antiteilchen. Für die unnatürliche Parität $\eta_p=(-1)^{j+1}$ hat man also einen Singlett-Zustand mit j=l für $\eta_p\,\eta_c=-1$ und einen Triplett-Zustand mit j=l für $\eta_p\,\eta_c=+1$. Für die natürliche Parität $\eta_p=(-1)^j$ ist die Situation komplizierter. Nichtrelativistisch ist ein Singlett-zustand der Parität $(-1)^j$ nicht möglich. Im Quark-Modell nenn: man diese Zustände „exotisch" zweiter Art.

Diese Zustände werden hier nicht betrachtet. Somit bleiben für $\eta_p=(-1)^j$ nur die entarteten Triplett-Zustände mit $j=l\pm1$ für $\eta_p\ \eta_c=+1$. Die möglichen Zustände sind in der folgenden Tabelle mit den entsprechenden spektroskopischen Bezeichnungen zusammengefaßt.

Tabelle 1

Parität $\eta_p=(-1)^j$						Parität $\eta_p=(-1)^{j+1}$					
$j=l-1$ (Triplett)			$j=l+1$ (Triplett)			$j=l$ (Singlett)			$j=l$ (Triplett)		
Zustand	j	η_p η_c	Zustand	j	η_p η_c	Zustand	j	η_p η_c	Zustand	j	η_p η_c
$^3P_0$	0	+ +				$^1S_0$	0	− +			
$^3D_1$	1	− −	$^3S_1$	1	− −	$^1P_1$	1	+ −	$^3P_1$	1	+ +
$^3F_2$	2	+ +	$^3P_2$	2	+ +	$^1D_2$	2	− +	$^3D_2$	2	− −
$^3G_3$	3	− −	$^3D_3$	3	− −	$^1F_3$	3	+ −	$^3F_3$	3	+ +
⋮			⋮			⋮			⋮		

6. Reduktion der dynamischen Gleichung auf den ρ - Teilchensektor

Mit einem nichtrelativistischen Cluster verglichen sind die relativistischen Cluster viel komplizierter. Diese relativistischen Cluster können in zwei Teile aufgespalten werden. Der eine Teil besteht aus einem irreduziblen Kern mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden; der andere kann als eine Polarisationswolke interpretiert werden, welche eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden hat, die aus dem relativistischen Feld resultieren. Um diese Polarisationswolke zu eliminieren, projeziert man /s. 20/ die Lösungen von dem unendlichen Raum in diesen irreduziblen Unterraum. Definiert man einen Projektionsoperator

$$P_k := k! \int |D_k(\overset{x'_k \cdots x'_1}{\alpha_k \cdots \alpha_1})\rangle \langle D_k(\overset{x'_1 \cdots x'_k}{\alpha_1 \cdots \alpha_k})| \, d^4x'_1 \ldots d^4x'_k \qquad (6.,1)$$

mit

$$P_k |\phi(j,a)\rangle := |\phi_k(j,a)\rangle \qquad (6.,2)$$

und fordert man, daß es für jeden Eigenzustand $|\phi(j,a)\rangle$ ein kleinstes $k=\rho$ gibt, für das $|\phi_k(j,a)\rangle \neq 0$ { $\forall k/\rho \leq k < \infty$ } während $|\phi_k(j,a)\rangle = 0$ { $\forall k/ 1 \leq k < \rho - 1$ }; ρ ist gruppentheoretisch durch Quantenzahlen des Eigenzustandes $|a\rangle$ wie Drehmoment, Baryonenzahl etc. gegeben. Dann kann man schreiben:

$$|\phi(j,a)\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} |\phi_{\rho+\ell}(j,a)\rangle \qquad (6.,3)$$

Schreibt man die dynamische Gleichung /5.3,7/ ausführlich, d.h. ohne die erste Konvention auf, so lautet sie:

$$\begin{aligned} Q_\alpha(x)\ |\phi(j,a)\rangle = \\ & i D_{\alpha\beta}(x)[\partial_\beta(x) + F_{\beta\theta}(x,x')\ j_\theta(x')\ dx'] \\ & + V_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \partial_\beta(x)\ \partial_\gamma(x)\ \partial_\delta(x) \\ & + 3\ V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dx'\ F_{\delta\tau}(x,x')\ j_\tau(x')\ \partial_\beta(x)\ \partial_\gamma(x) \\ & + 3\ V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dx'\ dx''\ F_{\beta\zeta}(x,x')\ j_\zeta(x')\ F_{\gamma\xi}(x,x'')\ j_\xi(x'')\ \partial_\delta(x) \\ & + V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dx'\ dx''\ dx'''\ F_{\beta\sigma}(x,x')\ j_\sigma(x')\ F_{\gamma\omega}(x,x'')\ j_\omega(x'')\ F_{\delta\Omega}(x,x''')\ j_\Omega(x''') \\ \otimes\ & |\phi(j,a)\rangle \end{aligned} \qquad (6.,4)$$

Benutzt man den Projektionsoperator /6.,1/, um den Feldoperator des ganzen Darstellungsraumes auf den ρ - Teilchensektor zu projezieren, so erhält man /siehe Herzog D1/:

$$P_{\rho+\ell}\, Q_\alpha(x)\, |\phi_n(j,a)> =$$

$$D_{\alpha\beta}\, \partial_\beta(x)\, |\phi_{\rho+\ell+1}>$$

$$+D_{\alpha\beta} \int F_{\beta\theta}(x,x')\, j_\theta(x')\, dx'\, |\phi_{\rho+\ell-1}>$$

$$+V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x)\, \partial_\delta(x)\, |\phi_{\rho+\ell+3}>$$

$$+3\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dx'\, F_{\delta\tau}(x,x')\, j_\tau(x')\, \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x)\, |\phi_{\rho+\ell+1}>$$

$$+3\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dx'\, dx''\, F_{\beta\zeta}(x,x')\, j_\zeta(x')\, F_{\gamma\xi}(x,x'')\, j_\xi(x'')\, \partial_\delta(x)\, |\phi_{\rho+\ell-1}>$$

$$+V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dx'\, dx''\, dx'''\, F_{\beta\sigma}(x,x')\, F_{\gamma\omega}(x,x'')\, F_{\delta\Omega}(x,x''')\, j_\sigma(x')\, j_\omega(x'')\, j_\Omega(x''')\, |\phi_{\rho+\ell-3}>$$

$$= 0$$

wobei (6.,5)

$$\ell + n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^{+0}$$

Bei der Zusammenfassung der Eigenzustände folgt infolgedessen:

$$P_{\rho+\ell}\, Q_\alpha(x)\, |\phi_n(j,a)> =$$

$$A_1\, |\phi_{\rho+\ell+1}> + A_3\, |\phi_{\rho+\ell-1}> + A_2\, |\phi_{\rho+\ell+3}> + A_4\, |\phi_{\rho+\ell-3}> \qquad (6.,5')$$

mit $\ell = 2\nu$ und $\nu \leq 0 < \infty$

Es bleibt noch zu zeigen, daß wir bei dieser Projektion eine irreduzible Darstellung erhalten haben.

W.-Bew.: Q_α wäre nicht irreduzibel, wenn Q_α mit anderen Operatoren außer dem Nulloperator oder dem Identitätsoperator vertauschbar wäre. Es ist allerdings

a.) $$P_n\, Q(x)\, |\phi(j,a)> = n! \int dx_1' \ldots dx_n'\; |D_n \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}> < D_n \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} | Q(x) | \phi(j,a)>$$

$$= Q(x)\, P_n\, |(j,a)$$

durch nochmalige Anwendung von /6.,1/

b.) $$0\, Q_\alpha(x)\, |\phi(j,a)> = Q_\alpha(x)\, 0\, |\phi(j,a)>$$

Hierbei sind P_n und 0 die obengenannten Identitäts- und Nulloperatoren.

Für $\ell = -1$ erhält man in /6.,5'/:

$$P_{\rho-1}\, Q_\alpha(x) |\phi(j,a)> = A_1 |\phi_\rho> + A_2 |\phi_{\rho+2}> = 0 \qquad (6.,6)$$

Für $\ell = 1$ bekommt man für /6.,5'/:

$$P_{\rho+1}\, Q_\alpha(x)\, |\phi(j,a)> = A_1 |\phi_{\rho+2}> + A_2 |\phi_{\rho+4}> + A_3 |\phi_\rho> = 0 \qquad (6.,6')$$

und schließlich: für $\ell = 3$ wird Gleichung /6.,5'/ zu:

$$P_{\rho+3}\, Q_\alpha(x)\, |\phi(j,a)> = A_1 |\phi_{\rho+4}> + A_2 |\phi_{\rho+6}> + A_3 |\phi_{\rho+2}> + A_4 |\phi_\rho> = 0 \qquad (6.,6'')$$

Diese Gleichungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$\sum_{\ell} P_{\rho+\ell-1}\, Q_{\alpha}(x)\, |\phi(j,a)> \;=$$

$$\sum_{\ell} \{A_1\, |\phi_{\rho+\ell}> + A_2\, |\phi_{\rho+\ell+2}> + A_3\, |\phi_{\rho+\ell-2}> + A_4\, |\phi_{\rho+\ell-4}> = 0 \qquad (6.,7)$$

Da die Operatoren von ρ unabhängig sind, führt man folgende Schreibweise ein: $|\chi_{\rho+\ell}> = |\phi_{\rho+\ell+2}>$. Dieses Funktional wird als Quelle der Polarisationswolke interpretiert, welche verschwinden soll. Mit /6.,6+6''/erhält man für /6.,7/ zwei Gleichungen, die gleichzeitig gelten:

$$A_1\, |\phi_{\rho+\ell}> + A_2\, |\phi_{\rho+\ell+2}> = 0 \qquad (6.,8)$$

$$\sum_{\ell=2} C_{\ell}(x)\, |\chi_{\rho+\ell-3}> - (A_3+A_4)\, |\phi_{\rho}>] = |f_x> = 0 \qquad (6.,8')$$

wobei bei der letzten Gleichung die Bedingung nach Formel /6.,2/ mitberücksichtigt wurde. Um die Polarisationswolke zu eliminieren, sucht man nach einer iterativen Lösung der Gleichung /6.,8'/. Außerdem schreibt man für $\sum_{\ell} |\chi_{\rho+\ell}>$ analog zu /6.,3/: $\sum_{\ell=2} |\chi_{\rho-\ell-3}> = |\chi(j,a)>$. Hierdurch wird /6.,8'/ zu:

$$Q_{\alpha}(x)\, |\chi> - (A_3+A_4)\, |\phi_{\rho}> = |f_x> = 0, \text{ wobei } Q_{\alpha}(x) \qquad (6.,9)$$

aus Gleichung /5.3,8/ entnommen wird. Mit $d(x)\,|\chi> = |K_x>$ wird Gleichung /6.,9/ zu:

$$(D_{\alpha\delta}(x) + V_{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\beta}(x)\, d_{\gamma}(x))\, |K_x> = |f_x> = (A_3+A_4)\, |\phi_{\rho}> \qquad (6.,10)$$

Multipliziert man mit der Greenfunktion unter Beachtung von /4.5,1/, so kann man für /6.,10/ schreiben:

$$(1 + G_{\alpha'\alpha} V_{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\beta}(x)\, d_{\gamma}(x))\, |K_x> = G_{\alpha'\alpha}\, |f_x> = |h_x> \qquad (6.,11)$$
$$= (1 + M_{\alpha\delta}(x,x'))\, |K_x>$$

mit $M_{\alpha\delta} = G_{\alpha'\alpha}(x,x')\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, d_{\beta}(x')\, d_{\gamma}(x')$.

Die iterative Lösung von Gleichung /6.,11/ lautet schließlich:

$$|K_x> = (1 + \int dx'\, M_{\alpha\delta}(x,x') + \int dx'\, dx''\, M_{\alpha\varepsilon}(x,x')\, M_{\varepsilon\kappa}(x',x'') + \ldots)\, |h_x>$$
$$= (G\, V\, d(x)\, d(x))^{\nu} G\, |f_x> \qquad (6.,12)$$

Setzt man diese Lösung in /6.,8/ ein, so erhält man:

$$P_{\rho}[A_1 |\phi_{\rho}> + V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_{\beta}(x)\, \partial_{\gamma}(x)\{d_{\delta}(x) - F_{\delta\varepsilon}(x,x')\, j_{\varepsilon}(x')\}\, |\chi_{\rho}>] = 0 \qquad (6.,13)$$

Durch Anwendung von /5.2,4/ und gleichzeitiger Beachtung von /5.2,11/ kann man für /6.,13/ schreiben:

$$P_{\rho}[A_1 |\phi_{\rho}> + V_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\beta}\partial_{\gamma} d_{\delta} |\chi_{\rho}> - V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\delta\varepsilon}\, j_{\varepsilon}\, \partial_{\beta} d_{\gamma} |\chi_{\rho}>] = 0 \qquad (6.,14)$$

Setzt man nun /6.,12/ in /6.,14/ ein, so erhält man in erster

Näherung unter Beachtung von /6.,12/:

$$P_\rho \{ A_1 |\phi_\rho> + V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_\beta \partial_\gamma [G_{\alpha'\alpha} |f_x> + G_{\alpha'\alpha} V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, d_\beta d_\gamma (G |f_x>)] - V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\delta\delta'} j_{\delta'} \partial_\beta [G |f_x> + G_{\alpha'\alpha} V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, d_\beta d_\gamma (G |f_x>)] \} = 0 \qquad (6.,15)$$

Mit /6.,10/ für $\ell = 0$ erhalten wir schließlich für unsere dynamische Gleichung /6.,14/:

$$A_1 |\phi_\rho> + \sum_\nu G V \partial\partial (G V d d)^\nu (A_3 + A_4) |\phi_\rho> - \sum_\nu V F j \partial G (G V d d)^\nu (A_3 + A_4) |\phi_\rho> = 0 \qquad (6.,16)$$

Gleichung /6.,16/ ist die Gleichung für den irreduziblen Teil des relativistischen Clusters.

Die Technik, um Gleichung /6.,16/ auszurechnen, greift die wesentlichen Züge der Berechnung der Kerne von Greensfunktionen auf. Grundlegend bei dieser Technik ist es, die Kerne durch eine Näherungstechnik zu berechnen, während die Lösungen nicht durch iterative Verfahren gewonnen werden können.

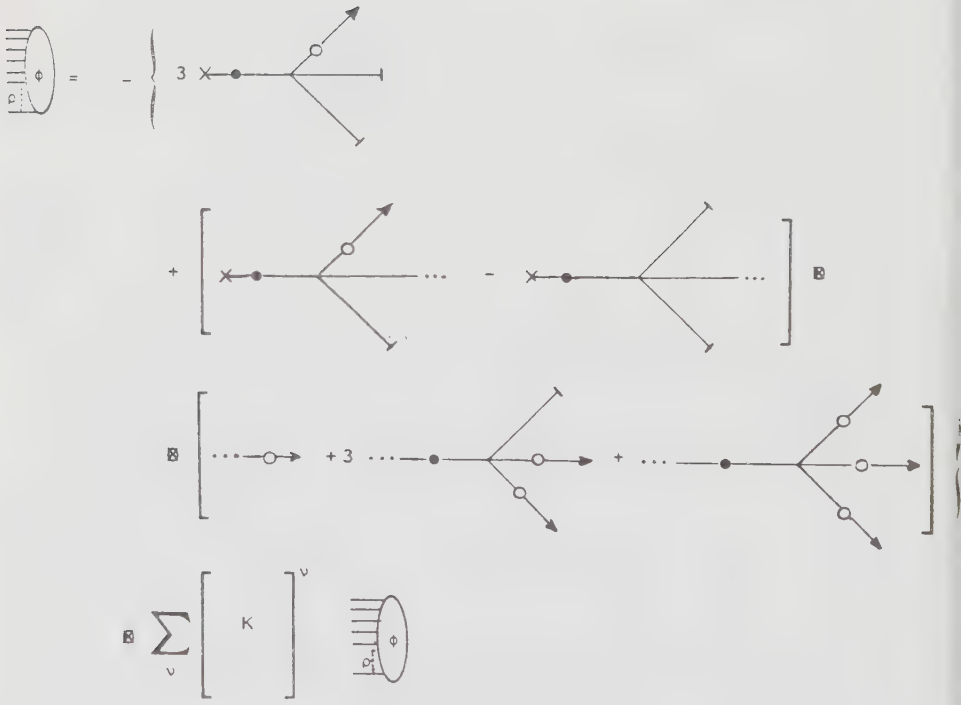
Damit die dynamische Gleichung /6.,16/ die Kanalgleichungen ergibt, muß eine Trennung der Selbstenergie- und der Wechselwirkungsenergieterme erfolgen. Die Schwierigkeit besteht darin, daß durch die Eliminierung der Polarisationswolke ein Potential mit einer unendlichen Zahl von Wechselwirkungstermen entstanden ist. Ferner führt die Einführung von Kanälen zu einem Symmetriebruch. Um daher alle antisymmetrischen Streuzustände zu bekommen, muß man sich virtueller Kanalzustände bedienen, durch deren Superposition wieder die Symmetrie hergestellt werden kann.

Vor der Lösung dieses Problems wird Gleichung /6.,16/ umgeformt und approximiert. In erster Näherung erhält man dabei:

$$\{ D_{\alpha'\alpha} \partial_\alpha(x) + 3\, V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, F_{\delta\tau}(x,x')\, j_\tau(x')\, \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x) + G_{\alpha\alpha'}(x',x)\, V_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''}\, \partial_{\beta''}(x)\, \partial_{\gamma''}(x) [\, D_{\alpha''\alpha} F_{\alpha''\beta''} j_{\beta''} + 3\, V_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''} F_{\beta''\beta} j_\beta F_{\gamma''\gamma} j_\gamma \partial + V_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''} F_{\beta''\beta} j_\beta F_{\gamma''\gamma} j_\gamma F_{\delta''\delta} j_\delta \,] - G_{\alpha\alpha'}(x',x)\, V_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''} F_{\delta\delta'} j_{\delta'}(x)\, \partial_{\beta''} [\, D_{\alpha''\alpha} F_{\alpha''\beta''} j_{\beta''} + 3\, V_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''} F_{\beta''\beta} j_\beta F_{\gamma''\gamma} j_\gamma \partial + V_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''} F_{\beta''\beta} j_\beta F_{\gamma''\gamma} j_\gamma F_{\delta''\delta} j_\delta \,] \} \otimes \otimes |\phi_\rho> = 0 \qquad (6.,17)$$

Bei der Multiplikation dieser Gleichung mit $G_{\alpha\alpha'}$ unter Beachtung von /4.5,1/ wird /6.,17/ zu:

Abbildung 2



Graphische Darstellung der Gleichung /6.,16/ nach Funktionalintegration in der üblichen Notation.

Idung 3 n-te Näherung der Gleichung /6.,16/ in graphischer Notation

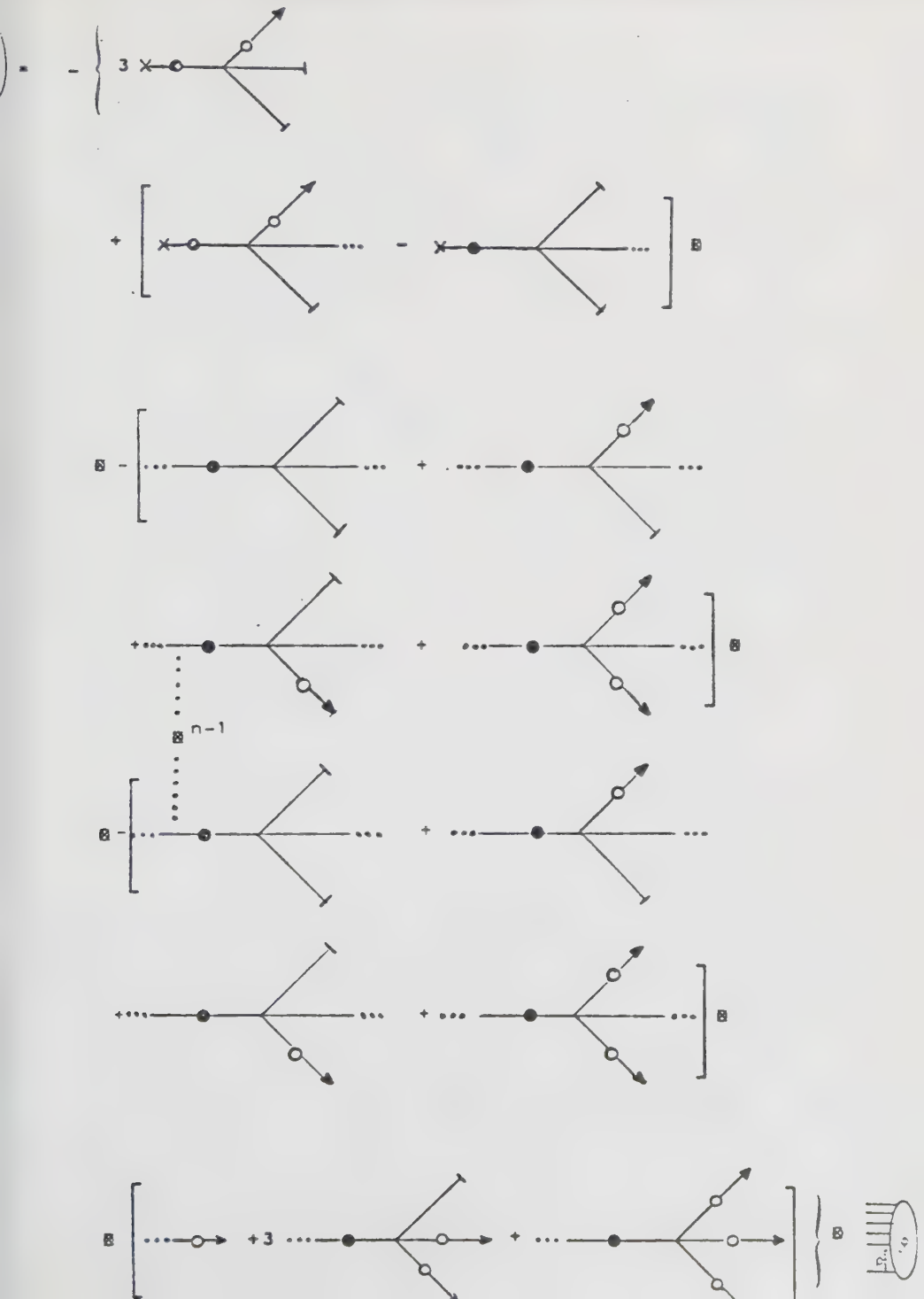
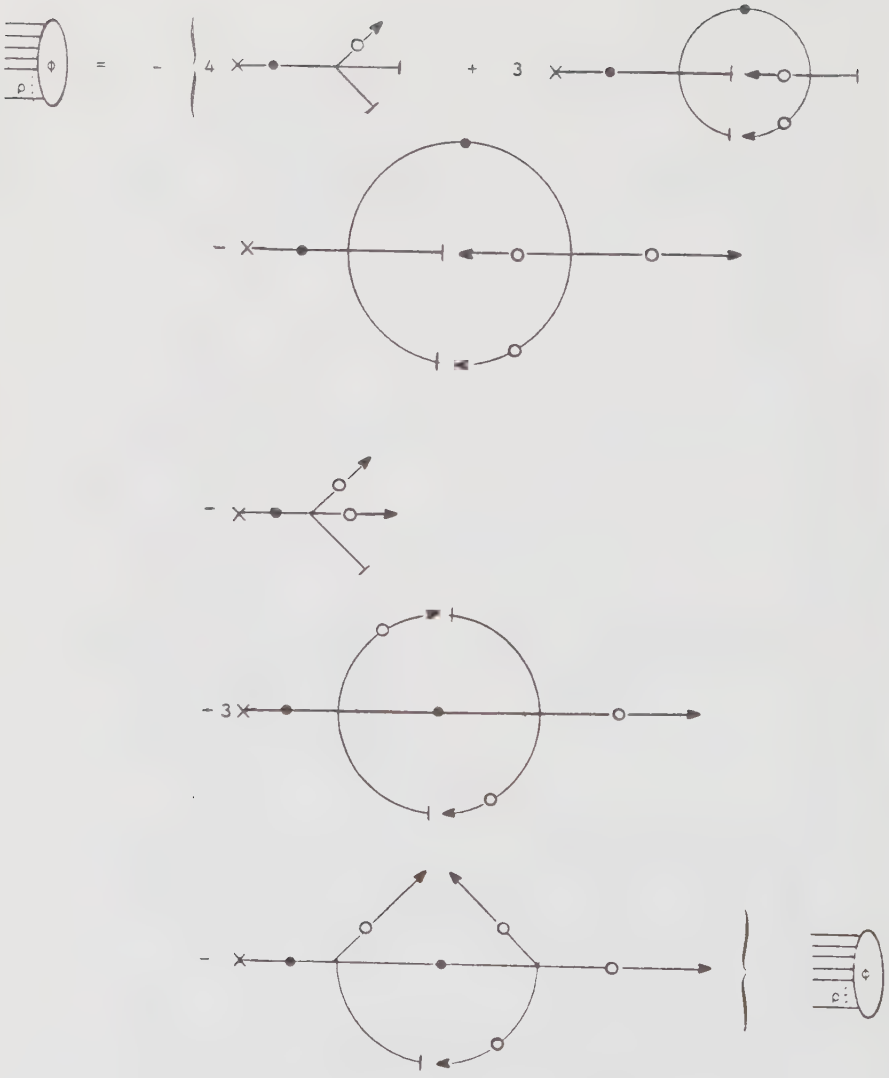
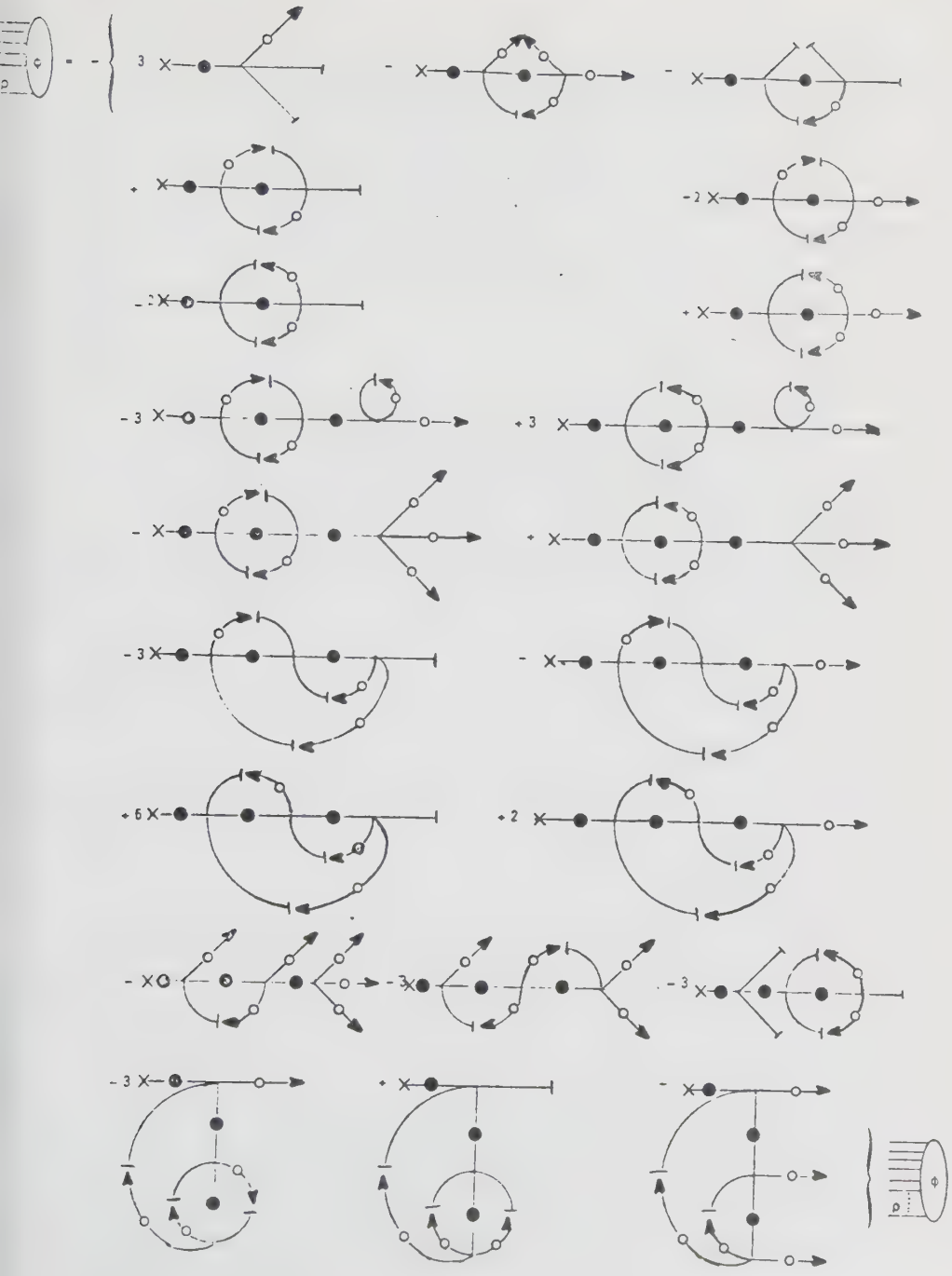


Abbildung 4



Graphische Darstellung der Gleichung /6.,18/ in der üblichen Notation

Abbildung 5 Zweite Näherung der Gleichung /6.,16/



$$
\begin{aligned}
&\partial_\alpha(x) \;+\; 3\, V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\; F_{\delta\delta'}(x,x')\; j_{\delta'}(x')\; \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x) \;\; G_{\alpha\alpha'} \\
&+\; G_{\alpha\alpha'}(x',x)\; V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\; \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x)\; F_{\delta\bar{\delta}}(x,x')\; j_{\bar{\delta}}(x') \\
&+3 G_{\alpha\alpha'}(x',x)\; V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\; \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x)\; G_{\delta\bar{\alpha}}(x',x) V F_{\bar{\beta}\bar{\beta}}(x,x')\; j_{\bar{\beta}}(x')\; F_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}(x,x'')\; j_{\bar{\gamma}}(x'')\; \partial_{\cdot} \\
&+\; G_{\alpha\alpha}(x',x)\; V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\; \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x)\; G_{\delta\bar{\alpha}}(x',x) V F_{\bar{\beta}\bar{\beta}}(x,x')\; F_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}(x,x'')\; F_{\bar{\delta}\bar{\delta}}(x,x''')\; j_{\bar{\beta}}\; j_{\bar{\gamma}}\; j_{\bar{\delta}} \\
&-\; G_{\alpha\alpha'}(x',x)\; V_{\alpha\beta\gamma\delta}\; F_{\delta\delta'}(x,x')\; j_{\delta'}(x')\; \partial_\beta(x) \quad F_{\gamma\bar{\beta}}(x,x')\; j_{\bar{\beta}}(x') \\
&-\; G_{\alpha\alpha'}(x',x)\; V_{\alpha\beta\gamma\delta}\; F_{\delta\delta'}(x,x')\; j_{\delta'}(x')\; \partial_\beta(x) 3\, V \;\; G_{\gamma\alpha}(x',x)\; F_{\bar{\beta}\bar{\beta}}(x,x')\; F_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}(x,x'')\; j_{\bar{\xi}}\; j_{\bar{\gamma}}\; \partial_{\delta} \\
&-\; G_{\alpha\alpha'}(x',x)\; V_{\alpha\beta\gamma\delta}\; F_{\delta\delta'}(x,x')\, j_{\delta'}(x')\, \partial_\beta(x) \;\; V \;\; G_{\gamma\alpha}(x',x)\; F_{\bar{\beta}\bar{\beta}}(x,x')\; F_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}(x,x'')\; F_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(x,x''')\; j_{\bar{\xi}} \\
&\mathcal{E}\; |\phi_\rho> \;=\; [\partial_\alpha(x) \;+\; Q(x,x',x'',x''')]\; |\phi_\rho> \;=\; 0
\end{aligned}
\tag{6.,18}
$$

6.1 Reduktion der Feldgleichung auf den $\rho+2n$ - Sektor

Außer der Streu- und Bindungsgleichung /6.,16/, die ein Teilchen im ρ - Sektor beschreibt, gibt es weitere Gleichungen für den Fall, daß sich das Teilchen in den verschiedenen $\rho+2n$-Sektoren befindet. Analog zu /6.,8+8'/ erhält man aus der allgemein gültigen Gleichung /6.,7/ für $\ell = 0 \ldots 6$ drei Gleichungen /siehe in diesem Zusammenhang die Tabelle in Kapitel 7/:

$$A_1\, |\phi_{\rho+\ell}> \;+\; A_2\, |\phi_{\rho+\ell+2}> \;\; = \;\; 0 \tag{6.1,1}$$

$$A_1\, |\phi_{\rho+\ell+2}> \;+\; A_2\, |\phi_{\rho+\ell+4}> \;+\; A_3\, |\phi_{\rho+\ell}> \;\; = \;\; 0 \tag{6.1,2}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=\varepsilon}^{6} P_{\rho+\ell-1}\; Q_\alpha(x)\; |\phi(j,a)> \;\; = \\
&\sum_{\ell=\varepsilon}^{6} A_1\, |\phi_{\rho+\ell}> \;+\; A_2\, |\phi_{\rho+\ell+2}> \;+\; A_3\, |\phi_{\rho+\ell-2}> \;+\; A_4\, |\phi_{\rho+\ell-4}> \;\; = \\
&= \;(A_3 + A_4)\, |\phi_\rho> \;+\; A_4\, |\phi_{\rho+2}> \;\; = \;\; 0
\end{aligned}
\tag{6.1,3}
$$

Schreibt man analog zu /6.,9/ für

$$\sum_{\ell} P_{\rho+\ell-1}\; |\phi(j,a)> \;\; = \;\; |\chi(j,a)>, \quad \text{so wird Gleichung /6.1,3/ zu}$$

$$Q_\alpha(x)\; |\chi> \;=\; [D_{\alpha\delta} d_\delta \;+\; V_{\alpha\beta\gamma\delta}\; d_\beta d_\gamma d_\delta]\, |\chi> \;=\; (A_3 + A_4)\, |\phi> \;+\; A_4\, |\xi> \;=\; |f_\chi> \tag{6.1,4}$$

wobei $|\phi_\rho>$ durch $|\phi>$ und $|\phi_{\rho+2}>$ durch $|\xi>$ ersetzt wurden.

Eliminiert man die Polarisationswolke durch eine iterative Lösung der Gleichung /6.1,4/ analog zu /6.,10/ bis /6.,12/, so erhält man unter Berücksichtigung von /6.,14/ für /6.1,2/ im Falle $\ell = 0$:

$$P_\rho [A_1 |\xi> + A_3 |\phi> + \sum_\nu V \partial\partial (G V d d)^\nu G \{A_3 + A_4\} |\phi>$$
$$+ \sum_\nu V \partial\partial (G V d d)^\nu G \; A_4 |\xi>$$
$$- \sum_\nu V F j \partial (G V d d)^\nu G \{A_3 + A_4\} |\phi>$$
$$- \sum_\nu V F j \partial (G V d d)^\nu G \; A_4 |\xi>] = 0 \qquad (6.1,5)$$

Mit /6.1,1/ wird eine iterative Lösung für $|\phi>$ gefunden und in /6.1,5/ eingesetzt. Aus /6.1,1/ erhält man:

$$[D \partial + 3 V F j \partial\partial] |\phi> + V \partial\partial\partial |\xi> = 0 \qquad (6.1,6)$$

Daraus folgt

$$[D \partial + 3 V F j \partial\partial] |\phi> = - V \partial\partial\partial |\xi> = |F_x> \qquad (6.1,7)$$

Multipliziert man mit der Greenfunktion auf beiden Seiten der Gleichung, so wird Gleichung /6.1,7/ zu

$$[\partial_\gamma + 3 G V F j \partial_\beta \partial_\gamma] |\phi> = G |F_x> \qquad (6.1,8)$$

und unter Multiplikation mit j_γ zu:

$$j_\gamma [\partial_\gamma + 3 G V F j \partial_\beta \partial_\gamma] |\phi> = j_\gamma G |F_x> \qquad (6.1,9)$$

Mit /5.2,4'/ erhält man für /6.1,9/:

$$|\phi> + [3 j_\gamma G V F j \partial\partial - \partial_\gamma j_\gamma] |\phi> = j_\gamma G |F_x> = |H_x>$$

Die iterative Lösung ist dann:

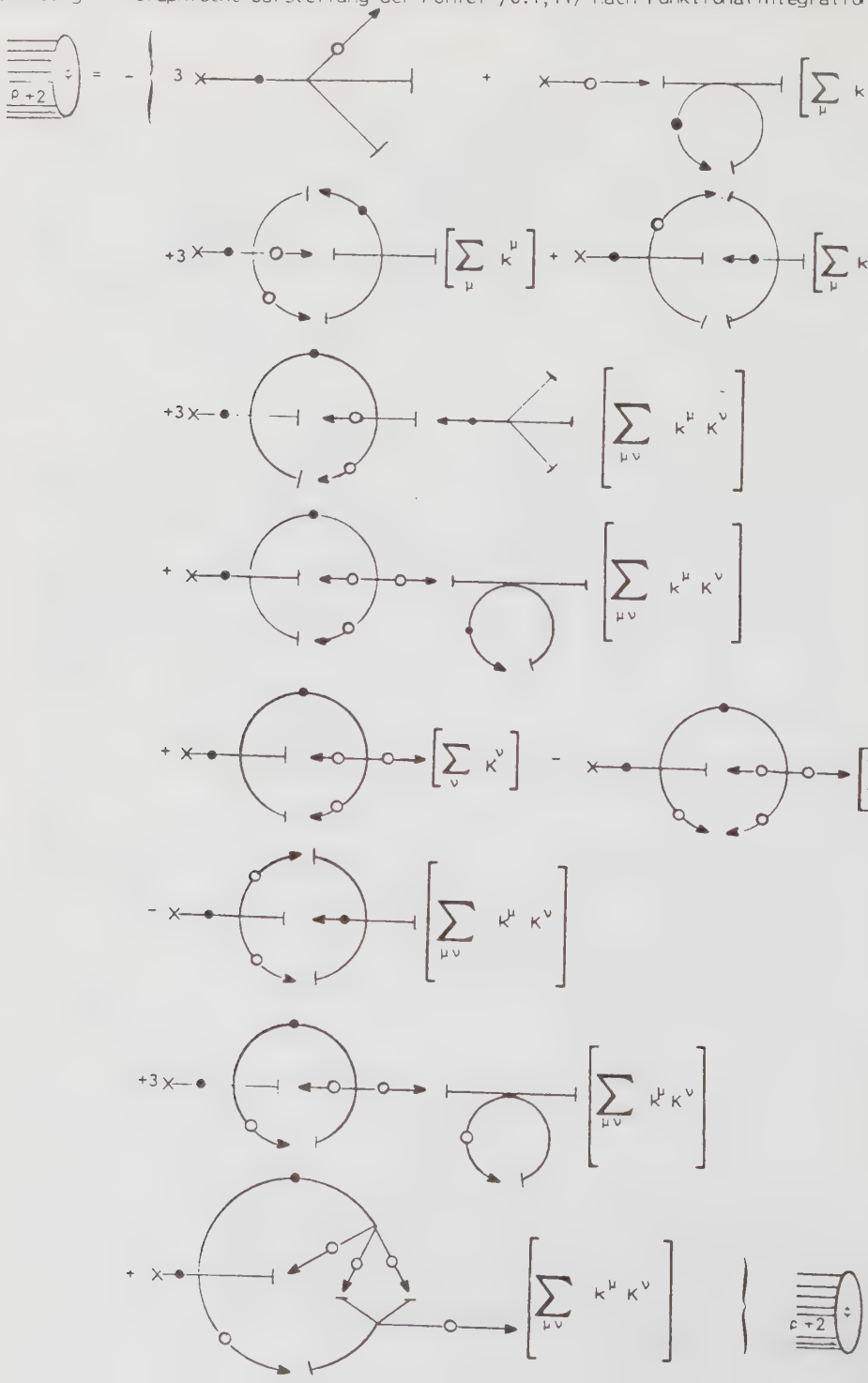
$$|\phi> = - \sum_\mu (3 j_\gamma G V F j \partial_\beta \partial_\gamma - \partial_\gamma j_\gamma)^\mu j_\gamma G V \partial\partial\partial |\xi> \qquad (6.1,10)$$

Setzt man /6.1,10/ in /6.1,5/ ein, so bekommt man die dynamische Gleichung für den ρ+a - Sektor. Sie lautet:

$$A_1 |\xi> + A_3 \sum_\mu (3jGVFj\partial\partial - \partial j)^\mu jGV \partial\partial\partial |\xi>$$
$$+ \sum_\nu \sum_\mu V\partial\partial (GVdd)^\nu G (A_3 + A_4)(3jGVFj\partial\partial - \partial j)^\mu jGV\partial\partial\partial |\xi>$$
$$+ \sum_\nu V\partial\partial (GVdd)^\nu G \; A_4 |\xi>$$
$$- \sum_\nu \sum_\mu VFj\partial (GVdd)^\nu G (A_3 + A_4)(3jGVFj\partial\partial - \partial j)^\mu jGV\partial\partial\partial |\xi>$$
$$- \sum_\nu VFj\partial (GVdd)^\nu G \; A_4 |\xi> = 0 \qquad (6.1,11)$$

An dieser Stelle sei erwähnt, daß bei der Beschreibung der Quarks, insbesonders ihr Auftreten als drei-Quark-Kondensat bzw. als zwei-Quark-Kondensat, die hier besprochene Projektion auf die verschiedenen ρ-Sektoren von physikalischer Bedeutung sein wird. Ebenfalls ließe sich in diesem Rahmen der Quark-sea beschreiben.

Abb. [illegible] 6 Graphische Darstellung der Formel /6.1,11/ nach Funktionalintegration



6.2 Das Anziehen der Green-Funktion

Außer zur Darstellung der inelastischen Streuung läßt sich Gleichung /6.1,11/ auch zur rekursiven Darstellung und Entwicklung der F - und G-Funktion benutzen. Diesen Sachverhalt stellt man am besten graphisch dar.

Die graphische Darstellung der Formel /6.1,11/ ergibt im Sektor $\rho = 1$
für die Kontraktionsfunktion:

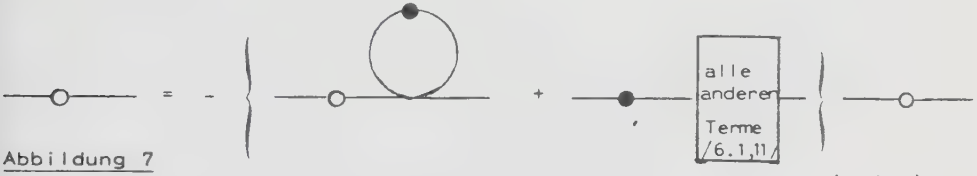
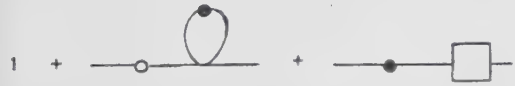


Abbildung 7

(6.2,1)

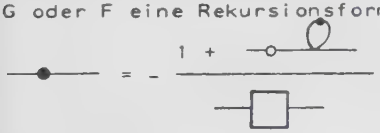
Löst man diese Gleichung nach F auf, so erhält man als Bedingung:



(6.2,2)

Abbildung 8

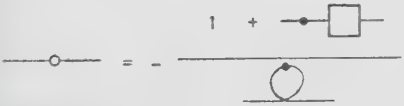
und aus dieser Gleichung erhält man unter Auflösung nach G oder F eine Rekursionsformel für dieselben:



(6.2,3)

Abbildung 9

bzw.



(6.2,4)

Abbildung 10

Formel /6.2,3/ und /6.2,4/ stellen die Anziehprozedur dar. Eine Anziehprozedur wie sie von Dammeier /43,44,45/ für die Monopol-Theorie vorgeschlagen wurde ist in der Dipoltheorie nicht durchführbar. Insofern stellen /6.2,3+4/ eine interesante Alternative dazu dar, zumal darüber hinaus /6.2,4/ die Möglichkeit einer konsistenten Berechnung von F^+ bietet.

7 Die Kanalgleichungen

Die Einführung von Kanälen führt zum Antisymmetriebruch /15,22/. Daher ist die Konstruktion der vollen antisymmetrischen Streuzustände unter Zuhilfenahme von virtuellen nicht-antisymmetrischen Kanalstreuzuständen und die Überlagerung dieser zur vollen Antisymmetrie notwendig. Durch den Antisymmetriebruch in den virtuellen Kanalstreuzuständen wird überhaupt die Konstruktion der Kanalgleichungen möglich.

Nimmt man eine Produktaufspaltung des Funktionalraumes in n Unterräume an:

$$H_F = \bigotimes_{\pi=1}^{n} H_F^{\pi} = H_F^1 \otimes \ldots \otimes H_F^n \qquad (7.,1)$$

und die erweiterten Kommutatorrelationen (siehe /5.2,4/)

$$\begin{aligned} [\, j_\alpha^{\pi_1}(x) \,,\, j_\beta^{\pi_2}(x') \,]_+ &= 0 \\ [\, \partial_\alpha^{\pi_1}(x) \,,\, \partial_\beta^{\pi_2}(x') \,]_+ &= 0 \\ [\, j_\alpha^{\pi_1}(x) \,,\, \partial_\beta^{\pi_2}(x') \,]_+ &= \delta_{\alpha\beta}\, \delta^{\pi_1 \pi_2}\, \delta(x-x') \end{aligned} \qquad (7.,2)$$

die dem Umstand Rechnung tragen, daß die Zustandsfunktionale nur unter Vertauschung der Koordinaten zweier Teilchen desselben Clusters antisymmetrisch sein sollen, wobei π_1 und π_2 zwei verschiedene Cluster darstellen, so sind die Basisfunktionale durch

$$\begin{aligned} &|\, D_n \left(\begin{matrix} x_1^1 \ldots x_{n_1}^1 \\ \alpha_1^1 \ldots \alpha_{n_1}^1 \end{matrix} \right| \ldots \left| \begin{matrix} x_1^{\pi} \ldots x_{n_\pi}^{\pi} \\ \alpha_1^{\pi} \ldots \alpha_{n_\pi}^{\pi} \end{matrix} \right) > \;= \\ &|\, D_{n_1} \left(\begin{matrix} x_1^1 \ldots x_{n_1}^1 \\ \alpha_1^1 \ldots \alpha_{n_1}^1 \end{matrix} \right) > \otimes \ldots \otimes |\, D_{n_\pi} \left(\begin{matrix} x_1^{\pi} \ldots x_{n_\pi}^{\pi} \\ \alpha_1^{\pi} \ldots \alpha_{n_\pi}^{\pi} \end{matrix} \right) > \;= \\ &\bigotimes_{\pi=1}^{\pi} |\, D_{n_\pi} \left(\begin{matrix} x_1^{\pi} \ldots x_{n_\pi}^{\pi} \\ \alpha_1^{\pi} \ldots \alpha_{n_\pi}^{\pi} \end{matrix} \right) > \end{aligned} \qquad (7.,3)$$

und die $|\phi_\rho^\pi>$ Funktionale durch

$$|\phi_\rho^\pi> := \phi_\rho^\pi \left(\begin{matrix} x_1^1 \ldots x_{\rho_1}^1 \\ \alpha_1^1 \ldots \alpha_{\rho_1}^1 \end{matrix} \right| \ldots \left| \begin{matrix} x_1^{\pi} \ldots x_{\rho_\pi}^{\pi} \\ \alpha_1^{\pi} \ldots \alpha_{\rho_\pi}^{\pi} \end{matrix} \right) \otimes |D_\rho \left(\begin{matrix} x_1^1 \ldots x_{\rho_1}^1 \\ \alpha_1^1 \ldots \alpha_{\rho_1}^1 \end{matrix} \right| \ldots \left| \begin{matrix} x_1^{\pi} \ldots x_{\rho_\pi}^{\pi} \\ \alpha_1^{\pi} \ldots \alpha_{\rho_\pi}^{\pi} \end{matrix} \right) >$$

gegeben. (7.,4)

Berücksichtigt man, daß die Zustandsfunktion in /5.3,5/ durch

$$\Phi(\overset{\times_1}{\alpha_1} \dots \overset{\times_n}{\alpha_n}) = \sum_{\P} \mathrm{Par}_{\P}(\pi)\, \phi_\rho^\pi \quad \text{gegeben ist /22/, so kann} \qquad (7.,5)$$

für die Vernichter- und Erzeugeroperatoren folgende Zerlegung gefunden werden:

$$\partial_\alpha(x) = \sum_{\P=1}^{\pi} \partial_\alpha^{\P}(x) \qquad (7.,6)$$

$$j_\alpha(x) = \sum_{\P=1}^{\pi} j_\alpha^{\P}(x)$$

und aus /7.,6/ folgt:

$$d_\alpha(x) = \sum_{\P=1}^{\pi} d_\alpha^{\P}(x) \qquad (7.,6')$$

$\mathrm{Par}_{\P}(\pi)$ ist hierbei ein Operator, der alle möglichen Partitionen der Zustandsfunktion, d.h. alle möglichen Clusterungen von π-Teilchen berücksichtigt. Durch Superposition dieser verschiedenen Cluster läßt sich die volle Antisymmetrie wieder herstellen /28/. Es genügt also, die Kanalgleichung für einen representativen π-Clusterkanal zu betrachten, da die anderen Kanalgleichungen durch Anwendung des Operators $\mathrm{Par}_{\P}(\pi)$ auf die Zustandsfunktion folgen. Setzt man /7.,6/ und /7.,6'/ in /6.,18/ ein, so erhält man die Kanalgleichung:

$$\Big[\sum_{\P_1} \partial_\alpha^{\P_1}(x)\Big] + 3\, V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, F_{\delta\bar{\delta}'}(x,x')\Big[\sum_{\P_1} j_{\delta'}^{\P_1}(x')\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\beta^{\P_2}(x)\Big]\Big[\sum_{\P_3} \partial_\gamma^{\P_3}(x)\Big]\, G_{\alpha\alpha'}(x',x)$$

$$+ G_{\alpha\alpha'}(x',x)\, V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, \Big[\sum_{\P_1} \partial_\beta^{\P_1}(x)\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\gamma^{\P_2}(x)\Big]\, F_{\delta\bar{\beta}}(x,x')\, \Big[\sum_{\P_3} j_{\beta}^{\P_3}(x')\Big]$$

$$+ 3\, G_{\alpha\alpha'} V \Big[\sum_{\P_1} \partial_\beta^{\P_1}(x)\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\gamma^{\P_2}(x)\Big]\, G_{\delta\bar{\alpha}'} V\, F_{\bar{\beta}\beta'}\, \Big[\sum_{\P_3} j_{\beta'}^{\P_3}(x')\Big]\, F_{\bar{\gamma}\gamma'}\, \Big[\sum_{\P_4} j_{\gamma'}^{\P_4}(x'')\Big]\Big[\sum_{\P_5} \partial_{\delta'}^{\P_5}(x'')\Big]$$

$$+ G_{\alpha\alpha'} V\, \Big[\sum_{\P_1} \partial_\beta^{\P_1}(x)\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\gamma^{\P_2}(x)\Big]\, G_{\delta\bar{\alpha}'} V\, F_{\bar{\beta}\beta'}\, F_{\bar{\gamma}\gamma'}\, F_{\bar{\delta}\delta'}\, \Big[\sum_{\P_3} j_{\beta'}^{\P_3}(x')\Big]\Big[\sum_{\P_4} j_{\gamma'}^{\P_4}(x'')\Big]\Big[\sum_{\P_5} j_{\delta'}^{\P_5}(x''')\Big]$$

$$- G_{\alpha\alpha'} V\, F_{\delta\bar{\delta}'}\, \Big[\sum_{\P_1} j_{\delta'}^{\P_1}(x')\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\beta^{\P_2}(x)\Big]\, F_{\gamma\bar{\beta}}\, \Big[\sum_{\P_3} j_{\beta}^{\P_3}(x')\Big]$$

$$-3 G_{\alpha\alpha'} V\, F_{\delta\bar{\delta}'}\, \Big[\sum_{\P_1} j_{\delta'}^{\P_1}(x')\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\beta^{\P_2}(x)\Big]\, V\, G_{\gamma\bar{\alpha}'}\, F_{\bar{\beta}\beta'}\, F_{\bar{\gamma}\gamma'}\, \Big[\sum_{\P_3} j_{\beta'}^{\P_3}(x')\Big]\Big[\sum_{\P_4} j_{\gamma'}^{\P_4}(x'')\Big]\Big[\sum_{\P_5} \partial_{\delta'}^{\P_5}(x'')\Big]$$

$$- G_{\alpha\alpha'} V\, F_{\delta\bar{\delta}'}\, \Big[\sum_{\P_1} j_{\delta'}^{\P_1}(x')\Big]\Big[\sum_{\P_2} \partial_\beta^{\P_2}(x)\Big]\, V\, G_{\gamma\bar{\alpha}'}\, F_{\bar{\beta}\beta'}\, F_{\bar{\gamma}\gamma'}\, F_{\bar{\delta}\delta'}\, \Big[\sum_{\P_3} j_{\beta'}^{\P_3}(x')\Big]\Big\{\Big[\sum_{\P_4} j_{\gamma'}^{\P_4}(x'')\Big]\Big[\sum_{\P_5} j_{\delta'}^{\P_5}(x''')\Big]\Big\}$$

$$\otimes\ |\phi_\rho^\pi\rangle = \Big\{\hat{Q}\Big(\sum_{\P_1,\P_2,\P_3} \partial^{\P_1,\P_2,\P_3}\ ;\ \sum_{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5} j^{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5}\Big)\Big\}\,|\phi_\rho^\pi\rangle = 0 \qquad (7.,7)$$

Gleichung /7.,7/ kann in zwei Anteile aufgespalten werden:

$$\{\hat{Q}(\sum_{\P_1,\P_2,\P_3} \partial^{\P_1,\P_2,\P_3}\ ;\ \sum_{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5} j^{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5})\}\,|\,\phi_\rho^\pi> \;=$$

$$\{\hat{Q}_1(\sum_{\P_1,\P_2,\P_3} \partial^{\P_1,\P_2,\P_3}\ ;\ \sum_{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5} j^{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5})\ /_{\P_1=\P_2=\P_3=\P_4=\P_5}\}\,|\,\phi_\rho^\pi>$$

$$+\{\hat{Q}_2(\sum_{\P_1,\P_2,\P_3} \partial^{\P_1,\P_2,\P_3}\ ;\ \sum_{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5} j^{\P_1,\P_3,\P_4,\P_5})\ /_{\{\P_1,\P_2,\P_3,\P_4,\P_5\}=\mathcal{M}}\}\,|\,\phi_\rho^\pi> \;=\; 0 \qquad (7.,8)$$

wobei $\mathcal{M}$ folgende gemischte Terme darstellt:

$\P_1\neq\P_2=\P_3=\P_4=\P_5$	$\P_3\neq\P_4\neq\P_5=\P_1=\P_2$	$\P_3\neq\P_1=\P_2\neq\P_4=\P_5$
$\P_1\neq\P_3=\P_4=\P_5=\P_2$	$\P_3\neq\P_5\neq\P_1=\P_2=\P_4$	$\P_3\neq\P_1=\P_4\neq\P_5=\P_2$
$\P_1\neq\P_2=\P_4=\P_5=\P_3$	$\P_1\neq\P_5\neq\P_2=\P_3=\P_4$	$\P_3\neq\P_1=\P_5\neq\P_2=\P_4$
$\P_1\neq\P_2=\P_3=\P_5=\P_4$	$\P_4\neq\P_5\neq\P_1=\P_2=\P_3$	$\P_3\neq\P_2=\P_4\neq\P_5=\P_1$
$\P_2\neq\P_1=\P_3=\P_4=\P_5$	$\P_1\neq\P_2=\P_3\neq\P_4=\P_5$	$\P_3\neq\P_2=\P_5\neq\P_1=\P_4$
$\P_2\neq\P_1=\P_3=\P_4=\P_5$	$\P_1\neq\P_2=\P_4\neq\P_5=\P_3$	$\P_3\neq\P_2=\P_1\neq\P_4=\P_5$
$\P_2\neq\P_3=\P_4=\P_5=\P_1$	$\P_1\neq\P_2=\P_5\neq\P_3=\P_4$	$\P_3\neq\P_4=\P_5\neq\P_1=\P_2$
$\P_2\neq\P_4=\P_5=\P_1=\P_3$	$\P_1\neq\P_3=\P_4\neq\P_5=\P_2$	$\P_3\neq\P_4=\P_1\neq\P_2=\P_5$
$\P_2\neq\P_5=\P_1=\P_3=\P_4$	$\P_1\neq\P_3=\P_5\neq\P_2=\P_4$	$\P_3\neq\P_4=\P_2\neq\P_5=\P_1$
$\P_3\neq\P_1=\P_2=\P_4=\P_5$	$\P_1\neq\P_3=\P_2\neq\P_4=\P_5$	$\P_3\neq\P_5=\P_1\neq\P_2=\P_4$
$\P_3\neq\P_2=\P_4=\P_5=\P_1$	$\P_1\neq\P_4=\P_5\neq\P_2=\P_3$	$\P_3\neq\P_5=\P_2\neq\P_4=\P_1$
$\P_3\neq\P_4=\P_5=\P_1=\P_2$	$\P_1\neq\P_4=\P_2\neq\P_3=\P_5$	$\P_3\neq\P_5=\P_4\neq\P_1=\P_2$
$\P_3\neq\P_5=\P_1=\P_2=\P_4$	$\P_1\neq\P_4=\P_3\neq\P_5=\P_2$	$\P_4\neq\P_1=\P_2\neq\P_3=\P_5$
$\P_4\neq\P_1=\P_2=\P_3=\P_5$	$\P_1\neq\P_5=\P_2\neq\P_3=\P_4$	$\P_4\neq\P_1=\P_3\neq\P_5=\P_2$
$\P_4\neq\P_2=\P_3=\P_5=\P_1$	$\P_1\neq\P_3=\P_5\neq\P_4=\P_2$	$\P_4\neq\P_1=\P_5\neq\P_2=\P_3$
$\P_4\neq\P_3=\P_5=\P_1=\P_2$	$\P_2\neq\P_1=\P_3\neq\P_4=\P_5$	$\P_4\neq\P_2=\P_3\neq\P_5=\P_1$
$\P_4\neq\P_5=\P_1=\P_2=\P_3$	$\P_2\neq\P_1=\P_4\neq\P_5=\P_3$	$\P_4\neq\P_2=\P_5\neq\P_1=\P_3$
$\P_5\neq\P_1=\P_2=\P_3=\P_4$	$\P_2\neq\P_1=\P_5\neq\P_3=\P_4$	$\P_4\neq\P_2=\P_1\neq\P_3=\P_5$
$\P_5\neq\P_2=\P_3=\P_4=\P_1$	$\P_2\neq\P_3=\P_4\neq\P_5=\P_1$	$\P_4\neq\P_3=\P_5\neq\P_1=\P_2$
$\P_5\neq\P_3=\P_4=\P_1=\P_2$	$\P_2\neq\P_3=\P_5\neq\P_1=\P_4$	$\P_4\neq\P_3=\P_1\neq\P_2=\P_5$
$\P_5\neq\P_4=\P_1=\P_2=\P_3$	$\P_2\neq\P_3=\P_1\neq\P_4=\P_5$	$\P_4\neq\P_3=\P_2\neq\P_5=\P_1$
$\P_1\neq\P_2\neq\P_3=\P_4=\P_5$	$\P_2\neq\P_4=\P_5\neq\P_1=\P_3$	$\P_4\neq\P_5=\P_1\neq\P_2=\P_3$
$\P_1\neq\P_3\neq\P_4=\P_5=\P_2$	$\P_2\neq\P_4=\P_1\neq\P_3=\P_5$	$\P_4\neq\P_5=\P_2\neq\P_3=\P_1$
$\P_1\neq\P_4\neq\P_5=\P_2=\P_3$	$\P_2\neq\P_4=\P_3\neq\P_5=\P_1$	$\P_4\neq\P_5=\P_3\neq\P_1=\P_2$
$\P_2\neq\P_3\neq\P_4=\P_5=\P_1$	$\P_2\neq\P_5=\P_1\neq\P_3=\P_4$	$\P_5\neq\P_1=\P_2\neq\P_3=\P_4$
$\P_2\neq\P_4\neq\P_5=\P_1=\P_3$	$\P_2\neq\P_5=\P_3\neq\P_4=\P_1$	$\P_5\neq\P_1=\P_3\neq\P_4=\P_2$
$\P_2\neq\P_5\neq\P_1=\P_3=\P_4$	$\P_2\neq\P_5=\P_4\neq\P_1=\P_3$	$\P_5\neq\P_1=\P_4\neq\P_2=\P_3$

$$\nu_1 = \nu_2 \neq \nu_3 = \nu_4 = \nu_5 \qquad \nu_1 \neq \nu_2 \neq \nu_3 \neq \nu_4 = \nu_5$$
$$\nu_1 = \nu_3 \neq \nu_2 = \nu_4 = \nu_5 \qquad \nu_1 \neq \nu_3 \neq \nu_4 \neq \nu_2 = \nu_5$$
$$\nu_1 = \nu_4 \neq \nu_2 = \nu_3 = \nu_5 \qquad \nu_1 \neq \nu_3 \neq \nu_5 \neq \nu_2 = \nu_4$$
$$\nu_1 = \nu_5 \neq \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 \qquad \nu_1 \neq \nu_4 \neq \nu_5 \neq \nu_2 = \nu_3$$
$$\nu_2 = \nu_3 \neq \nu_1 = \nu_4 = \nu_5 \qquad \nu_2 \neq \nu_3 \neq \nu_4 \neq \nu_1 = \nu_5$$
$$\nu_2 = \nu_4 \neq \nu_1 = \nu_3 = \nu_5 \qquad \nu_2 \neq \nu_3 \neq \nu_5 \neq \nu_1 = \nu_4$$
$$\nu_2 = \nu_5 \neq \nu_1 = \nu_3 = \nu_4 \qquad \nu_2 \neq \nu_4 \neq \nu_5 \neq \nu_1 = \nu_3$$
$$\nu_3 = \nu_4 \neq \nu_1 = \nu_2 = \nu_5 \qquad \nu_3 \neq \nu_4 \neq \nu_5 \neq \nu_1 = \nu_2$$
$$\nu_3 = \nu_5 \neq \nu_1 = \nu_2 = \nu_4 \qquad \nu_1 \neq \nu_2 \neq \nu_3 \neq \nu_4 \neq \nu_5$$
$$\nu_1 \neq \nu_2 \neq \nu_3 \neq \nu_4 = \nu_5$$
$$\nu_1 \neq \nu_2 \neq \nu_4 \neq \nu_3 = \nu_5 \qquad (7.,9)$$

Multipliziert man /7.,8/ mit /5.2,10/ unter Beachtung von /7.,3/, so erhält man die Kanalgleichung

$$< D_\rho \left(\begin{matrix} y_1^1 \dots y_{\rho_1}^1 \\ \beta_1^1 \dots \beta_{\rho_1}^1 \end{matrix} \right| \dots \left| \begin{matrix} y_1^\Pi \dots y_{\rho_\Pi}^\Pi \\ \beta_1^\Pi \dots \beta_{\rho_\Pi}^\Pi \end{matrix} \right) \Big| \tilde{\tilde{Q}}_1 + \tilde{\tilde{Q}}_2 \Big| \phi_\rho^\pi > = 0 \quad \begin{matrix} /\text{siehe } 7.,11/ \\ /\text{und } 7.,11'/ \end{matrix} \qquad (7.,10)$$

für die ρ-Teilchen - π-Cluster-Anfangskonfiguration und die ρ-Teilchen - Π-Cluster-Endkonfiguration.

Verfährt man analog zu /6.,18/ mit Gleichung /6.1,11/, so erhält man in erster Näherung für /6.1,11/:

$$< D_{\rho+2} \left(\begin{matrix} y_1^1 \dots y_{\rho_1}^1 \\ \beta_1 \dots \beta_{\rho_1}^1 \end{matrix} \right| \dots \left| \begin{matrix} y_1^\Pi \dots y_{\rho_\Pi}^\Pi \\ \beta_1^\Pi \dots \beta_{\rho_\Pi}^\Pi \end{matrix} \right) \Big| \tilde{\tilde{Q}} \Big| \phi_{\rho+2}^\pi > = 0 \quad \begin{matrix} /\text{siehe } 7.,11/ \\ /\text{und } 7.,11'/ \end{matrix} \qquad (7.,10')$$

mit

$$\tilde{\tilde{Q}} = [\sum_{\nu_1} \partial_\alpha^{\nu_1}] + 3\, G_{\alpha\alpha'} V_{\alpha'\beta\gamma\delta} F_{\delta\delta'} [\sum_{\nu_1} j_{\delta'}^{\nu_1}] [\sum_{\nu_2} \partial_\beta^{\nu_2}] [\sum_{\nu_3} \partial_\gamma^{\nu_3}]$$

$$+ \Big[F_{\alpha\beta'} [\sum_{\nu_1} j_{\beta'}^{\nu_1}] + 3\, G_{\alpha\alpha'} V_{\alpha'\beta\gamma\delta} F_{\beta\beta'} [\sum_{\nu_1} j_{\beta'}^{\nu_1}] \; F_{\gamma\gamma'} [\sum_{\nu_2} j_{\gamma'}^{\nu_2}] [\sum_{\nu_3} \partial_\delta^{\nu_3}] \Big] [\sum_{\nu_4} j_\delta^{\nu_4}] \; G_{\delta\alpha} V [\sum_{\nu_5} \partial_\beta^{\nu_5}] [\sum_{\nu_6} \partial_\gamma^{\nu_6}] [\sum_{\nu_7} \partial_\delta^{\nu_7}]$$

$$+ G_{\alpha\alpha'} V [\sum_{\nu_1} \partial_\beta^{\nu_1}] [\sum_{\nu_2} \partial_\gamma^{\nu_2}] \Big[F_{\delta\tilde{\delta}} [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_3}] + 3\, G_{\delta\tilde{\alpha}} V F [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] F [\sum_{\nu_4} j_{\tilde{\gamma}}^{\nu_4}] [\sum_{\nu_5} \partial_{\tilde{\delta}}^{\nu_5}] + G_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}} V F [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] F [\sum_{\nu_4} j_{\tilde{\gamma}}^{\nu_4}] F [\sum_{\nu_5} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_5}] \Big] [\sum_{\nu_6} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_6}] GV [\sum_{\nu_7} \partial_\beta^{\nu_7}] [\sum_{\nu_8} \partial_\gamma^{\nu_8}] [\sum_{\nu_9} \partial_\delta^{\nu_9}]$$

$$+ G_{\alpha\alpha'} V_{\alpha'\beta\gamma\delta} [\sum_{\nu_1} \partial_\beta^{\nu_1}] [\sum_{\nu_2} \partial_\gamma^{\nu_2}] G_{\delta\tilde{\alpha}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\tilde{\beta}} [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] F_{\gamma\tilde{\gamma}} [\sum_{\nu_4} j_{\tilde{\gamma}}^{\nu_4}] F_{\delta\tilde{\delta}} [\sum_{\nu_5} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_5}]$$

$$- G\, V F [\sum_{\nu_1} j_{\delta'}^{\nu_1}] [\sum_{\nu_2} \partial_\beta^{\nu_2}] \Big[F_{\delta\tilde{\delta}} [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] + 3\, G_{\gamma\tilde{\alpha}} V F [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] F [\sum_{\nu_4} j_{\tilde{\gamma}}^{\nu_4}] [\sum_{\nu_5} \partial_{\tilde{\delta}}^{\nu_5}] + G_{\gamma\tilde{\alpha}} V F [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] F [\sum_{\nu_4} j_{\tilde{\gamma}}^{\nu_4}] F [\sum_{\nu_5} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_5}] \Big] [\sum_{\nu_6} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_6}] GV \otimes$$

$$\otimes [\sum_{\nu_7} \partial_\beta^{\nu_7}] [\sum_{\nu_8} \partial_\gamma^{\nu_8}] [\sum_{\nu_9} \partial_\delta^{\nu_9}]$$

$$- G_{\alpha\alpha'} V F [\sum_{\nu_1} j_{\delta'}^{\nu_1}] [\sum_{\nu_2} \partial_\beta^{\nu_2}] GVF [\sum_{\nu_3} j_{\tilde{\beta}}^{\nu_3}] F [\sum_{\nu_4} j_{\tilde{\gamma}}^{\nu_4}] F [\sum_{\nu_5} j_{\tilde{\delta}}^{\nu_5}]$$

Sowohl $\tilde{Q}\,|\phi_\rho^\pi> = 0$ als auch $\tilde{\bar{Q}}\,|\phi_{\rho+2}^\pi> = 0$ zeichnen eine Koordinate aus:.

$$[\sum \partial_\alpha^{\pi_1} + \tilde{Q}_{Rest}]|\,\phi_\rho^\pi> = 0$$
$$[\sum_{\pi_1} \partial_\alpha^{\pi_1} + \tilde{\bar{Q}}_{Rest}]|\,\phi_{\rho+2}^\pi> = 0 \qquad (7.,11)$$

Um die Symmetrie wieder herzustellen, führt man eine Funktionalintegration durch. Unter einer Funktionalintegration versteht man:

$$\int \delta j_\alpha \,|\, F_\alpha(j)> \;=\; |\, S(j)> \qquad \text{wobei} \quad \partial_\alpha \,|\, S(j)> \;=\; |\, F_\alpha(j)>$$

$$\partial_\beta \int \delta j_\alpha \;|\, F_\alpha(j)> \;=\; |\, F_\beta(j)>$$

$$\int \delta j_\alpha\, \partial_\alpha |\, S(j)> \;=\; |\, S(j)> \;+\; \text{Konstante}$$

$$\int \delta j_\alpha \,|\, a\, F_\alpha(j) + b\, H_\alpha(j)> \;=\; a \int \delta j_\alpha \,|\, F_\alpha(j)> + b \int \delta j_\alpha \,|\, H_\alpha(j)>$$

$$\int \delta j_\alpha \,|\, S_1[\partial_\alpha S_2]> \;=\; |S_1\, S_2> - \int \delta j_\alpha |[\partial_\alpha S_1]S_2>$$

Für /7.,11/ ergibt sich somit:

$$\int (\sum_{\pi_1} \delta j_\alpha^{\pi_1})\,[\sum_{\pi_1} \partial_\alpha^{\pi_1} + \tilde{Q}_{Rest}]|\,\phi_\rho^\pi> \;=\; \tilde{\tilde{Q}}\;|\,\phi_\rho^\pi>$$

$$= \sum_{\pi_1} 1|_\alpha^{\pi_1}\,|\phi_\rho^\pi> + \int (\sum_{\pi_1} \delta j_\alpha^{\pi_1})\;\tilde{Q}_{Rest}\,|\,\phi_\rho^\pi> \;=\; 0$$

bzw. (7.,11')

$$\int (\sum_{\pi_1} \delta j_\alpha^{\pi_1})[\sum_{\pi_1} \partial_\alpha^{\pi_1} + \tilde{\bar{Q}}_{Rest}]|\,\phi_{\rho+2}^\pi> \;=\; \tilde{\bar{Q}}\;|\,\phi_{\rho+2}^\pi>$$

$$= \sum_{\pi_1} 1|_\alpha^{\pi_1}\,|\phi_{\rho+2}^\pi> + \int (\sum_{\pi_1} \delta j_\alpha^{\pi_1})\;\tilde{\bar{Q}}_{Rest}\,|\,\phi_{\rho+2}^\pi> = \;0$$

Mit diesen Gleichungen erhält man /7.,10 und 7.,10'/.
Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß bei der Funktionalintegration die Konstante willkürlich gleich Null festgesetzt wurde.

Aus diesen Kanalgleichungen folgen die permutierten Kanalgleichungen durch Anwendung des Partitionsoperators /26/:

$$Par_{\tau}(\pi)\ \hat{Q}\ Par_{\tau}(\pi-1)\ Par_{\tau}(\pi)\ \phi^{\pi}_{\rho} = 0 \qquad (7.,12)$$

beziehungsweise

$$Par_{\tau}(\pi)\ \hat{Q}\ Par_{\tau}(\pi-1)\ Par_{\tau}(\pi)\ \phi^{\pi}_{\rho+2} = 0 \qquad (7.,12')$$

Beachtet man Gleichung /7.,7/ und Gleichung /7.,11/, so erkennt man, daß folgende Streureaktionen für die ersten Sektoren möglich sind:

Tabelle 2

Reaktion		Bekannt	Art
$\bar{p}\ p$	$\rightarrow\ \bar{p}\ p$	ja	$\phi^1_1\ \phi^1_1 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1$
	$\rightarrow\ \bar{n}\ n$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_1$
	$\rightarrow\ \bar{p}\ \bar{p}\ p\ p$	ja	$\phi^1_1\ \phi^1_3 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_1$
	$\rightarrow\ \bar{p}\ n\ \pi^+$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ \bar{n}\ p\ \pi^-$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ \bar{p}\ p\ \pi^0$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ \pi^{\pm 0}\pi^{\mp 0}$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_2\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ \bar{p}\ p$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_3$
	$\rightarrow\ N\ N^* \rightarrow N\ \pi\ N$ $\rightarrow N\ \eta\ N$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_3 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ N\ \Delta \rightarrow N\ N\ \pi$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_3 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ N^*\ \Delta \rightarrow N^*N\ \pi$	ja	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_3 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ \bar{p}\ \Sigma^+ \rightarrow \bar{p}\ p\ \pi^0$	?	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_3 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow\ p\ \Xi^- \rightarrow p\ \Lambda\ \pi^-$	?	$\rightarrow\ \phi^1_1\ \phi^1_3 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\rightarrow$ $\vdots$		
$p\ \pi^-$	$\rightarrow\ \bar{p}\ p\ n$	ja	$\phi^1_1\ \phi^1_2 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_1\ \phi^1_1$
	$\rightarrow\ p\ \pi^-$	ja	$\phi^1_1\ \phi^1_2 \rightarrow \phi^1_1\ \phi^1_2$
	$\vdots$		

Diese Tabelle stellt nur eine kleine Auswahl verschiedener Reaktionen (berechenbar aus /7.,12/ und /7.,12'/) dar.

Aus den Gleichungen /7.,10/ und /7.,11/ ergeben sich für die ersten drei ρ-Sektoren die folgenden Gleichungen:

$$\langle D_1^1(\beta_1^{y_1^1})|\ K\ |\phi_1^1\rangle = 0 \qquad (7.,13\ a)$$

$$\langle D_2^1(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1})|\ K\ |\phi_2^1\rangle = 0 \qquad (7.,13\ b_1)$$

$$\langle D_2^2(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^2})|\ K\ |\phi_2^1\rangle = 0 \qquad (7.,13\ b_2)$$

$$\langle D_2^1(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1})|\ K\ |\phi_2^2\rangle = 0 \qquad (7.,13\ b_3)$$

$$\langle D_2^2(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^2})|\ K\ |\phi_2^2\rangle = 0 \qquad (7.,13\ b_4)$$

$$\langle D_3^1(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1}\beta_3^{y_3^1})|\ K\ |\phi_3^1\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_1)$$

$$\langle D_3^2(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1}\beta_3^{y_3^2})|\ K\ |\phi_3^1\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_2)$$

$$\langle D_3^3(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^2}\beta_3^{y_3^3})|\ K\ |\phi_3^1\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_3)$$

$$\langle D_3^1(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1}\beta_3^{y_3^1})|\ K\ |\phi_3^2\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_4)$$

$$\langle D_3^2(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1}\beta_3^{y_3^2})|\ K\ |\phi_3^2\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_5)$$

$$\langle D_3^3(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^2}\beta_3^{y_3^3})|\ K\ |\phi_3^2\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_6)$$

$$\langle D_3^1(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1}\beta_3^{y_3^1})|\ K\ |\phi_3^3\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_7)$$

$$\langle D_3^2(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^1}\beta_3^{y_3^2})|\ K\ |\phi_3^3\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_8)$$

$$\langle D_3^3(\beta_1^{y_1^1}\beta_2^{y_2^2}\beta_3^{y_3^3})|\ K\ |\phi_3^3\rangle = 0 \qquad (7.,13\ c_9)$$

wobei K für $\tilde{\tilde{Q}}$ /aus 7.,10/ oder $\tilde{\tilde{\mathcal{Q}}}$ /aus 7.,11/ stehen kann.
Im Laufe dieser Arbeit wird man sich vorwiegend mit /7.,13 a/ und /7.,13 b_1/ bei der Eigenwertberechnung, mit /7.,13 b_4/ und /7.,13 c_7/ bei der Berechnung der Streugleichungen befassen. Die Berechnung der entsprechenden Matrizen für die Eigenwertbestimmung erfolgt in Kapitel 11, die Berechnung der entsprechenden Matrizen für die zwei- und drei-Teilchenstreuung erfolgt in Kapitel 12.

Neben den Matrizen /7.,13 a bis c_9/, die Übergänge und Umordnungen beschreiben, welche sich auf derselben Energiestufe abspielen, sind Übergänge möglich, bei denen sich die Teilchen vor und nach dem Prozeß auf unterschiedlichen Energiestufen befinden:

$$\langle D_3(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_1)$$

$$\langle D_3(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{2}{\beta_3}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_2)$$

$$\langle D_3(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{1}{\beta_3}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_3)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}\overset{5}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_4)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{3}{\beta_4}\overset{4}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_5)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}\overset{5}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_6)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}\overset{5}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_7)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}\overset{5}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_8)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}\overset{5}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_9)$$

$$\langle D_5(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}\overset{5}{\beta_5}) | K | \phi_1^1 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ d_{10})$$

mit $K = \tilde{Q}$

und in analoger Weise für die Übergänge zu D_7, D_9 usw.
Für den $\rho = 2$ - Sektor ergeben sich folgende Übergangsmatrizen:

$$\langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}) | K | \phi_2^1 \rangle = 0 \qquad \langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{2}{\beta_2}\overset{3}{\beta_3}\overset{4}{\beta_4}) | K | \phi_2^2 \rangle = 0$$

$$\langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{2}{\beta_3}\overset{3}{\beta_4}) | K | \phi_2^1 \rangle = 0 \qquad \langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{2}{\beta_3}\overset{3}{\beta_4}) | K | \phi_2^2 \rangle = 0$$

$$\langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{2}{\beta_3}\overset{2}{\beta_4}) | K | \phi_2^1 \rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{2}{\beta_3}\overset{2}{\beta_4}) | K | \phi_2^2 \rangle = 0 \qquad (7.,13\ e_1 \text{ bis } e_{10})$$

$$\langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{1}{\beta_3}\overset{2}{\beta_4}) | K | \phi_2^1 \rangle = 0 \qquad \langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{1}{\beta_3}\overset{2}{\beta_4}) | K | \phi_2^2 \rangle = 0$$

$$\langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{1}{\beta_3}\overset{1}{\beta_4}) | K | \phi_2^1 \rangle = 0 \qquad \langle D_4(\overset{1}{\beta_1}\overset{1}{\beta_2}\overset{1}{\beta_3}\overset{1}{\beta_4}) | K | \phi_2^2 \rangle = 0$$

In analoger Weise lassen sich Übergangsmatrizen für höhere Energiestufen bestimmen. Hierbei handelt es sich um Übergänge der Form:

$$\phi_2 \rightarrow D_6 \; ; \; D_8 \; ; \; D_{10} \quad \ldots$$

$$\phi_3 \rightarrow D_5 \; ; \; D_7 \; ; \; D_9 \quad \ldots \qquad (7.,13\ f)$$

$$\vdots$$

Neben den Übergängen /7.,13 d bis f/ sind noch Übergänge möglich, bei denen der Anfangszustand ein angeregter Zustand ist. Für den $\rho = 1$ - Sektor ergibt sich dann mit $\underline{K = \emptyset}$:

$$\langle D_1(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1})|K|\phi^{1}_{1+2}\rangle = 0 \qquad \langle D_1(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1})|K|\phi^{2}_{1+2}\rangle = 0 \qquad \langle D_1(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1})|K|\phi^{3}_{1+2}\rangle = 0 \qquad (7.,13\ g_1\text{-}s$$

Die Übergänge $\phi_{1+2} \rightarrow D_3$ sind in /7.,13 c/ schon erwähnt worden.

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{3}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{4}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{5}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0$$

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{3}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{3}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{4}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0$$

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{3}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0$$

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{3}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0 \qquad \text{mit} \quad a = 1,2,3 \qquad (7.,13\ h_1\text{-}h$$

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0$$

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{2}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0$$

$$\langle D_5(\overset{y}{\beta}{}^{1}_{1}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{2}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{3}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{4}\overset{y}{\beta}{}^{1}_{5})|K|\phi^{a}_{1+2}\rangle = 0$$

Analog kann man die Übergangsmatrizen für höhere ρ - Sektoren darstellen:

$$\phi_{2+2} \rightarrow D_2 \; ; \; D_4 \; ; \; D_6 \; ; \; D_8 \quad \ldots.$$

$$\phi_{3+2} \rightarrow D_3 \; ; \; D_5 \; ; \; D_7 \; ; \; D_9 \quad \ldots. \qquad (7.,13\ i)$$

$$\vdots$$

7.1 Die Herleitung der Eigenwertgleichungen und der Streugleichungen

Zur Berechnung der Masseneigenwerte und der entsprechenden Terme für die Streugleichungen geht man von der Gleichung /7.,11'a/ aus, wenn man die Anregungsstrukturen vernachlässigen will. Diese Gleichung zeichnet eine Koordinate aus. Um die Unsymmetrie in den Koordinaten zu beheben, können verschiedene Methoden angewandt werden. In dieser Arbeit wird einem Vorschlag von Dammeier /43,45/ gefolgt, der im wesentlichen darauf hinausläuft, die durch die Funktionaldifferentiation hervorgebrachte Unsymmetrie im Φ - Funktionensystem durch eine unbestimmte Funktionalintegration wieder aufzuheben. Es gelten folgende Regeln für die Funktionalintegration (man beachte bitte auch /5.2,7/):

$$\int \delta j_\alpha \mid F_\alpha(j) > \; = \; \mid S(j) > \qquad \text{wobei } \partial_\alpha \mid S(j) > \; = \; \mid F_\alpha(j) >$$

$$\partial_\beta \int \delta j_\alpha \mid F_\alpha(j) > \; = \; \mid F_\beta(j) >$$

$$\int \delta j_\alpha \, \partial_\alpha \mid S(j) > \; = \; \mid S(j) > \; + \; \text{Konstante}$$

$$\int \delta j_\alpha \mid a\, F_\alpha(j) + b\, H_\alpha(j) > \; = \; a \int \delta j_\alpha \mid F_\alpha(j) > + b \int \delta j_\alpha \mid H_\alpha(j) >$$

$$\int \delta j_\Phi \mid S_1[\partial_\alpha S_2] > \; = \; \mid S_1 \; S_2 > \; - \int \delta j_\alpha \mid [\partial_\alpha S_1] S_2 > \qquad (7.1,1)$$

Führt man die funktionale Integration bei /7.,11'/ durch und projeziert gleichzeitig auf den Einteilchensektor, so erhält man unter Beachtung von /7.1,1/ und den Kommutatorrelationen /5.2,4'/:

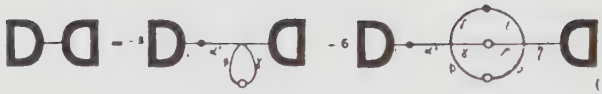
$$\Phi\left(\begin{matrix} y \\ \beta \end{matrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \; = < D_1\left(\begin{matrix} y \\ \beta \end{matrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \mid \int \delta j_\alpha^1 \, \partial_\alpha^1 \Phi\left(\begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \mid a\right) \mid D_1\left(\begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) > d^4 x_1 \qquad \text{/siehe 7.,13 a /}$$

$$= < D_1\left(\begin{matrix} y \\ \beta \end{matrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \mid \int \delta j_\alpha^1 (-Q(x, x', x'', x''')) \mid D_1\left(\begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) > \; d^4 x_1$$

Diese Gleichung ist identisch mit /7.,13 a/ für den Fall /7.,7 / (graphisch dargestellt in /Abbildung 7 a/. Unter Anwendung von /7.1,1 zweite Zeile/ erhält man für den Ein-Kanal:

$$\begin{aligned} &= -8\, G_{\beta\alpha'} V_{d\beta\gamma\eta} F_{\gamma\beta} \; \Phi_\eta \\ &\quad -6\, G_{\beta\alpha'} V_{d\beta\gamma\delta} G_{\delta\varepsilon} V_{\varepsilon\mu\nu\eta} F_{\mu\gamma} \; F_{\nu\beta} \; \Phi_\eta \end{aligned} \qquad (7.1,2)$$

bzw. graphisch dargestellt:



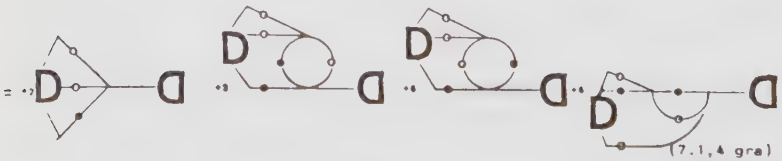
(7.1,2 gra)
1. Näherung

In zweiter Näherung erhält man neben den zwei schon bekannten Graphen einen der Form: $G_{\beta_1\alpha} G_{\gamma\alpha'} G_{\gamma'\alpha''} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \; V_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} F_{\delta\delta'} \; F_{\beta\gamma''} F_{\beta'\beta''} V_{\alpha''\beta''\gamma''\alpha_1}$

Graphisch dargestellt lautet die zweite Näherung:

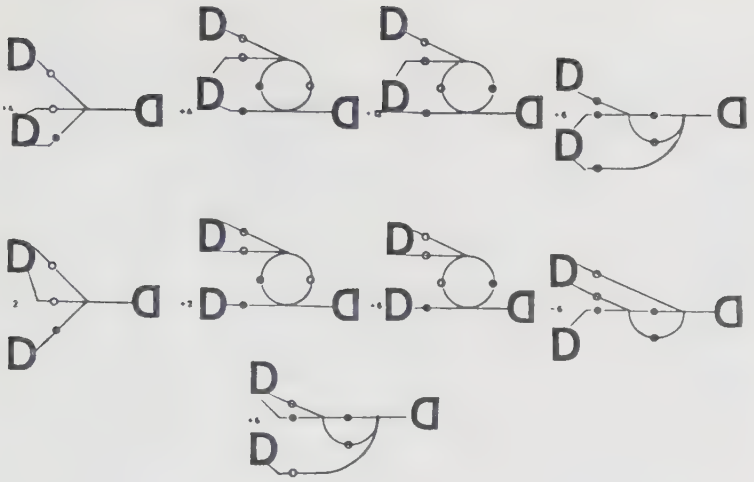
(7.1,3 gra)
2. Näherung

Für die Matrix /7.,13 d_3/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung in Analogie zu /7.1,2/:



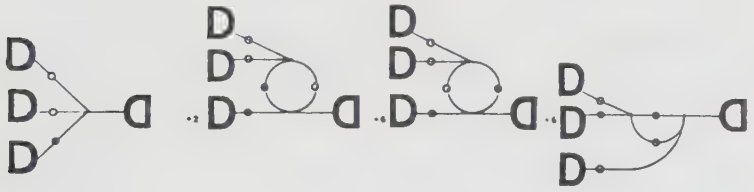
(7.1,4 gra)
1.Näherung

Für /7.,13 d_2/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung:



(7.1,5 1.Nä)

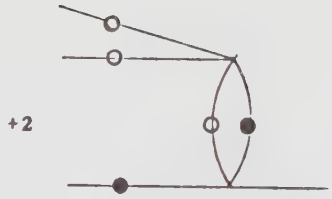
Für /7.,13 d_1/ erhält man schließlich in erster Näherung:

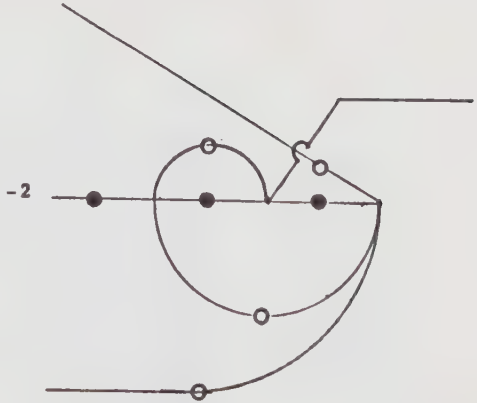


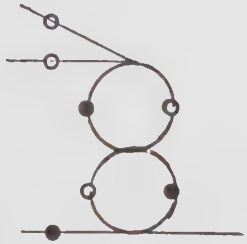
(7.1,6 1.Nä)

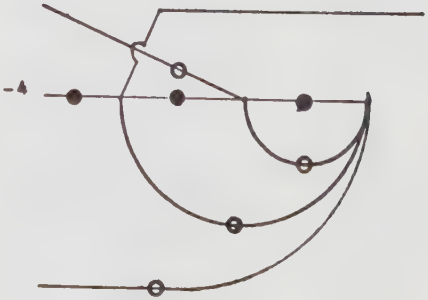
Die zweite Näherung baut sich aus folgenden Graphen auf:

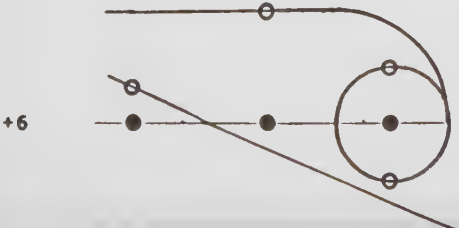
Graphen für die zweite Näherung von /7.,13 d/











(7.1,7 2.Näherung)

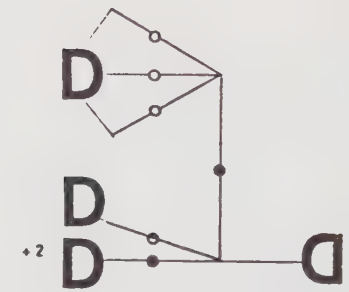
Für /7.,13 d_{10}/ erhält man in erster Näherung nach der üblichen Umordnung:

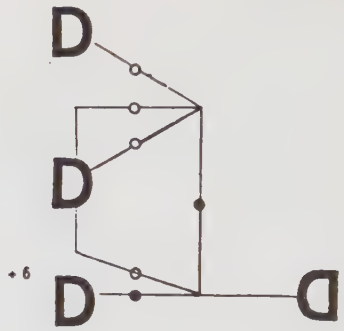
(7.1,8 1.Na)

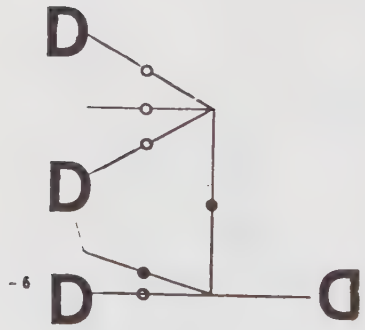
Für /7.,13 $d_{\bullet 5}$/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung:

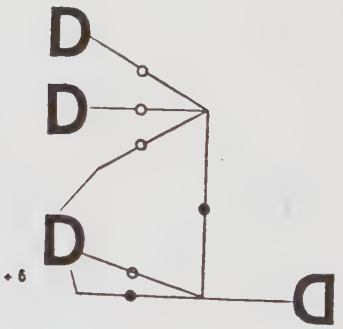
(7.1,9 1.Na)

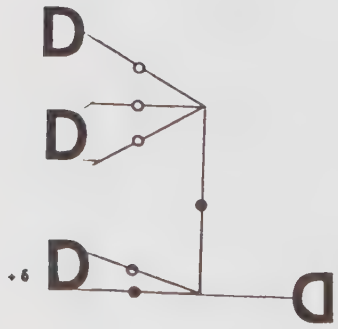
Für /7.,13 d / erhält man in erster Näherung nach Umordnung:

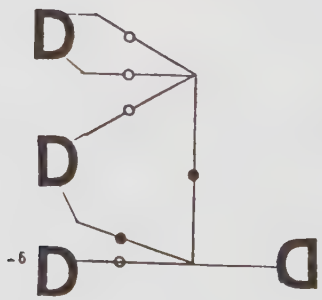


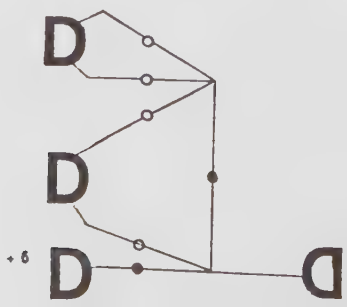






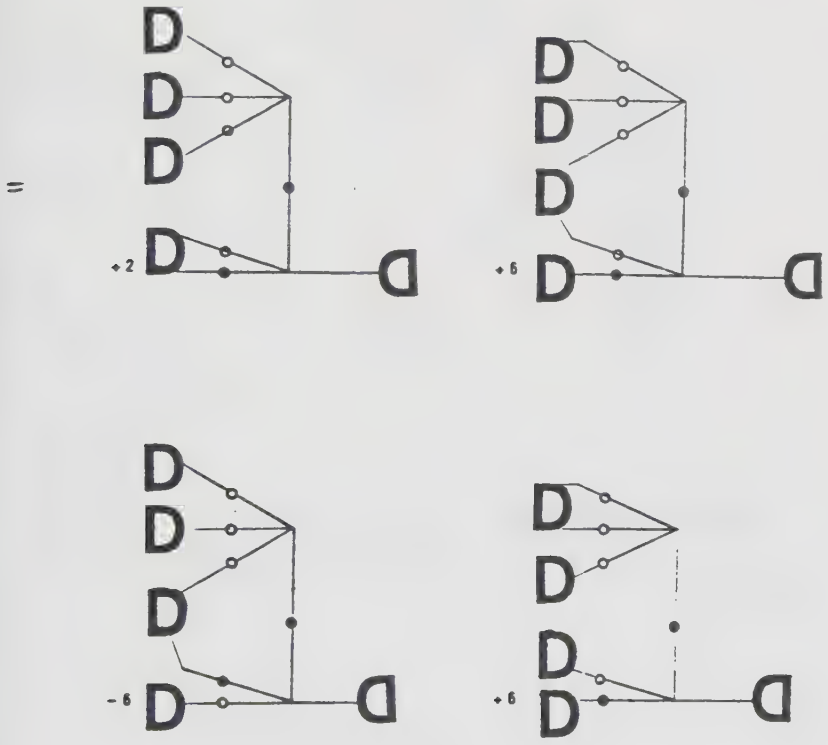






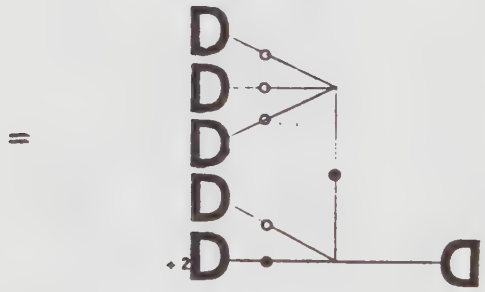
(7.1,10 1N)

Für die Matrix /7.,13 d_5/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung:



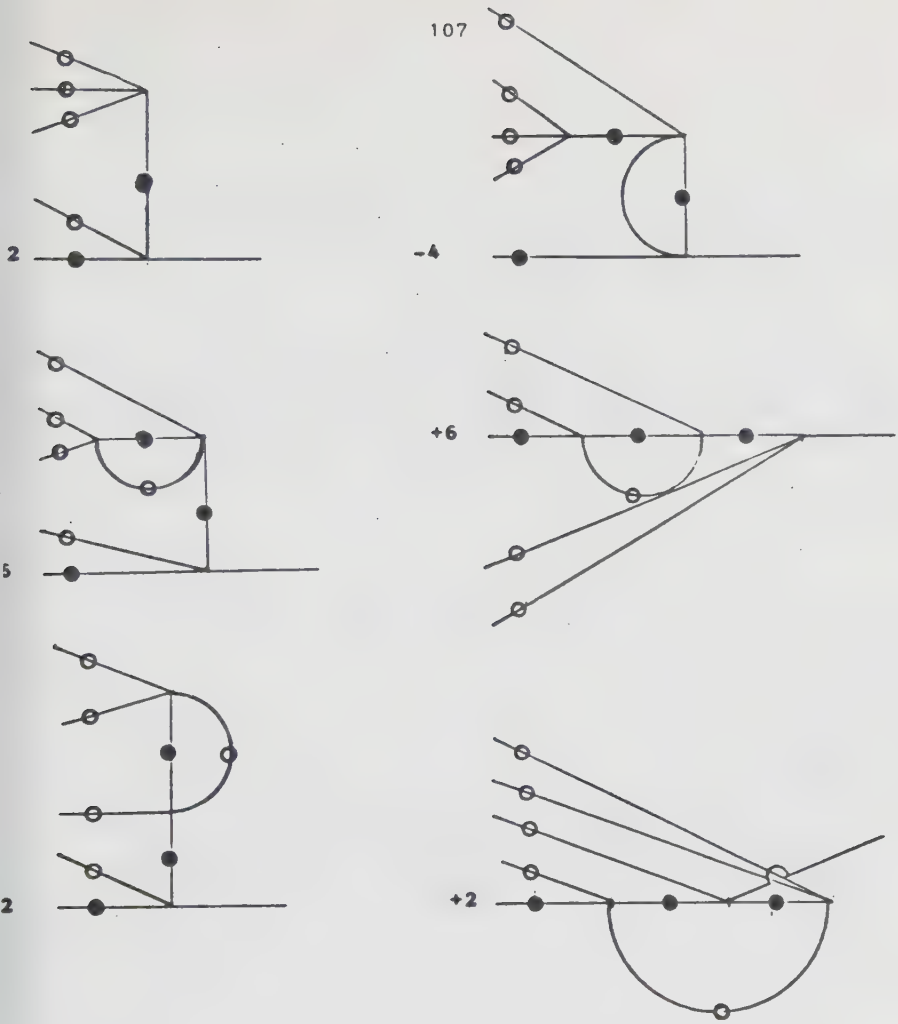
(7.1,11 1.N)

Für die Matrix /7.,13 d_4/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung:



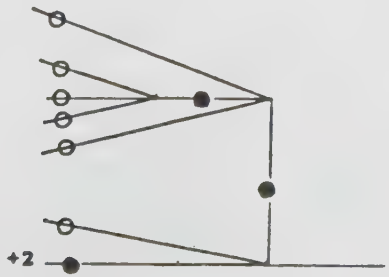
(7.1,12 1.

Für die zweite Näherung erhält man folgende Graphen.
Wie man aus den Graphen sieht ist uns nur der erste aus der ersten Näherung bekannt.



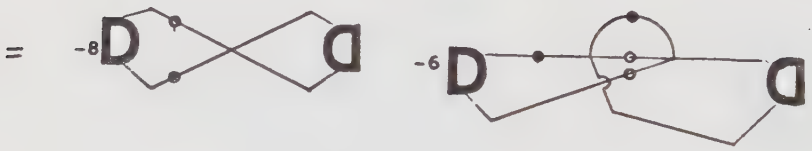
(7.1,13 2.N)

In zweiter Näherung erscheint zum ersten Mal ein Graph, der einen Übergang D_1 zu D_7 beschreibt. Dieser Graph sieht folgendermaßen aus:



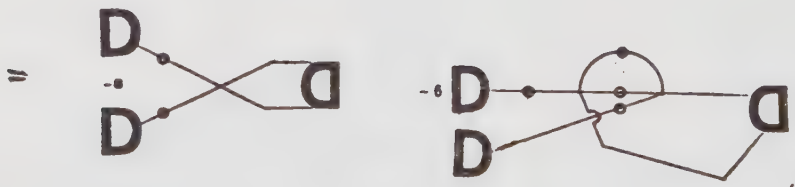
(7.1,14 2.N)

Für die Matrix /7.,13 b_1/ erhält man in erster Näherung nach der üblichen Umordnung:

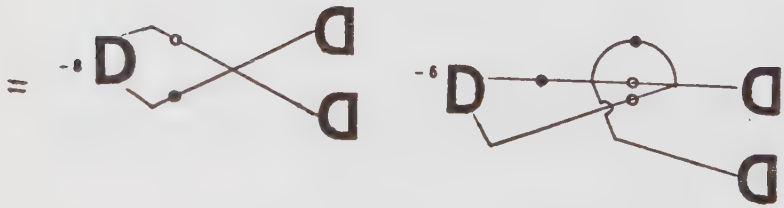


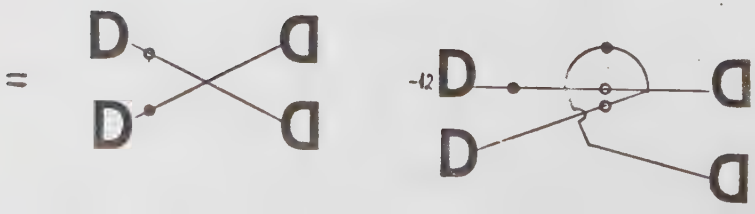
(7.1,15 1.

Für /7.,13 b_2 und b_3 und b_4/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung:

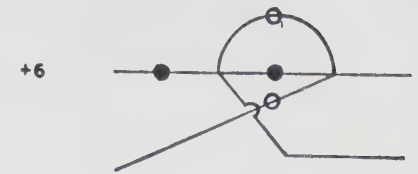


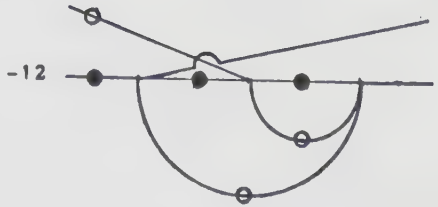
(7.1,16-18
1.Näh

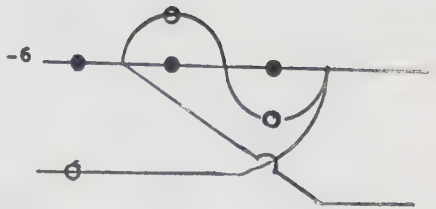


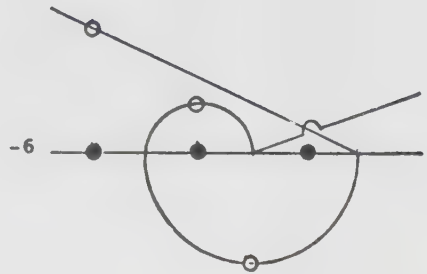


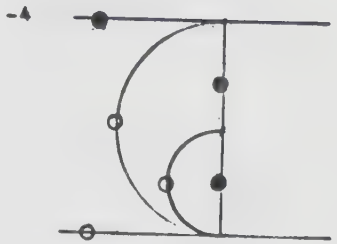
In zweiter Näherung erhält man für die Matrizen /7.,13 b/ folgende Graphen

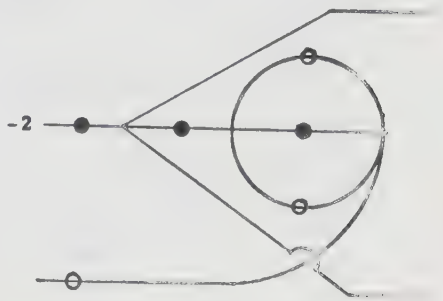






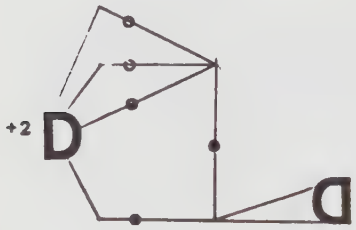


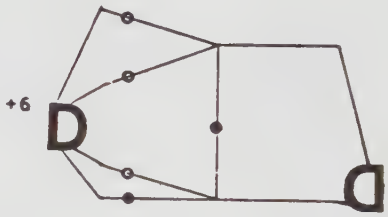


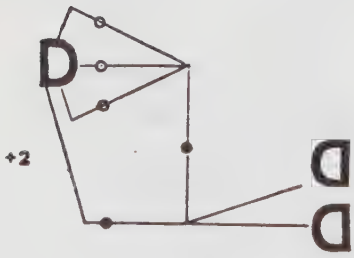


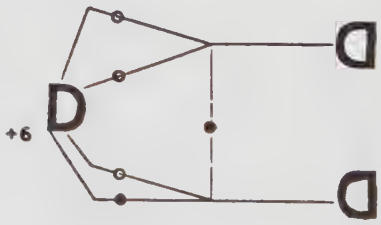
(7,1,10 2. herung)

Für die Matrizen /7.,13 e_5 und e_{10}/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung die folgenden Graphen:



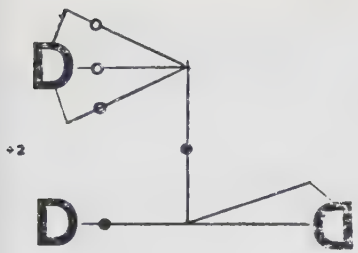


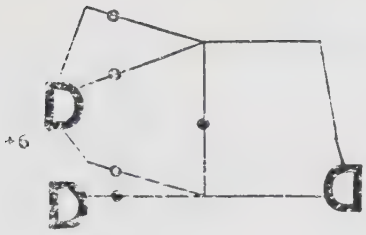


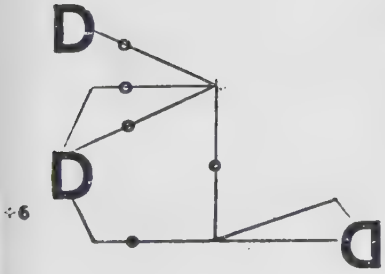


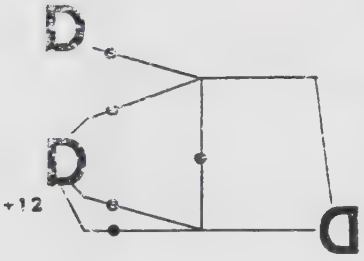
(7.1,20+21)
1. Näherung

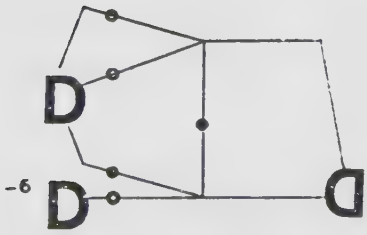
Für /7.,13 e_3 und e_4/ erhält man den nächsten Graphen; für /7.,13 e_8 und e_9/ den übernächsten Graphen. Beide Graphen ebenfalls nach Umordnung und in erster Näherung.



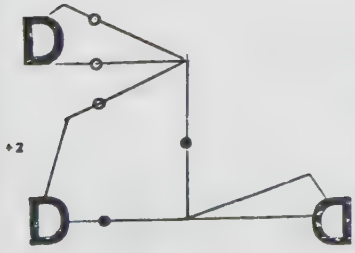


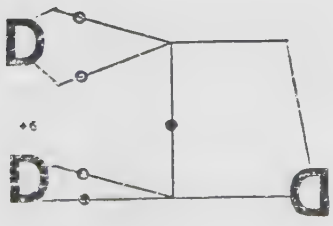


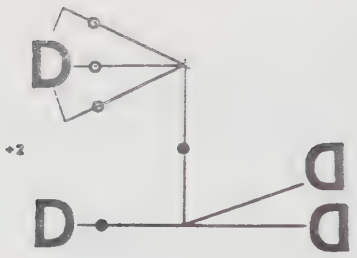


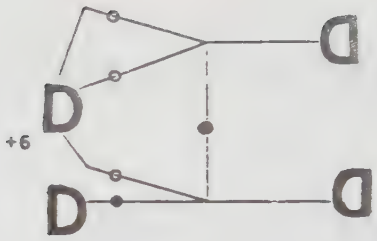


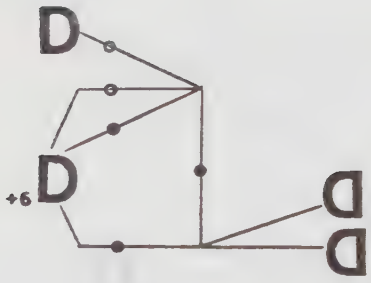
(7.1,22 1.N)

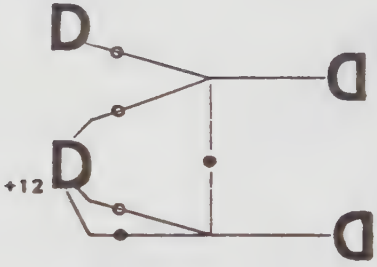


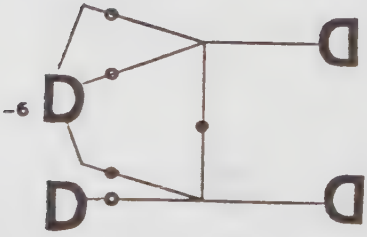




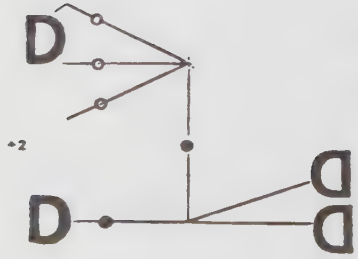


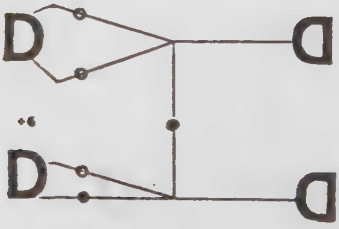




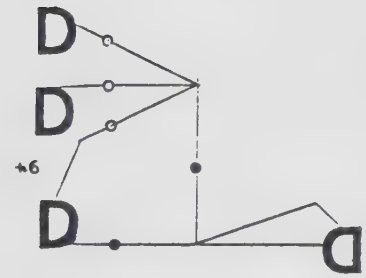


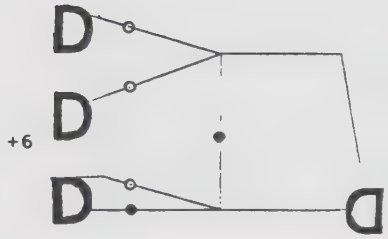
(7.1,23 1M)

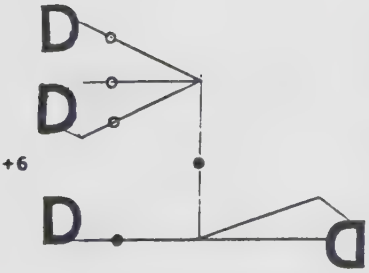


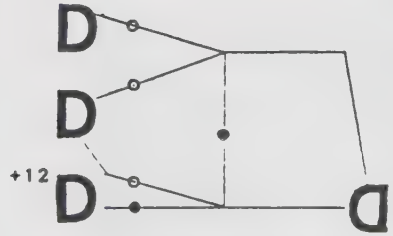


Für /7.,13 e_2/ erhält man nach Umordnung in erster Näherung:

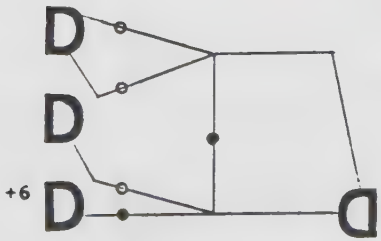






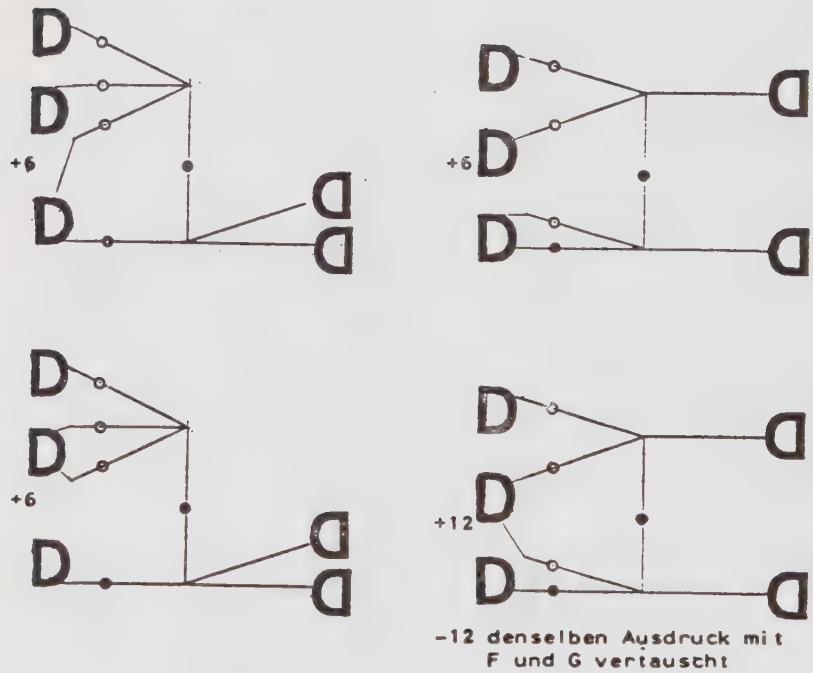


-12 den selben Ausdruck mit F und G vertauscht

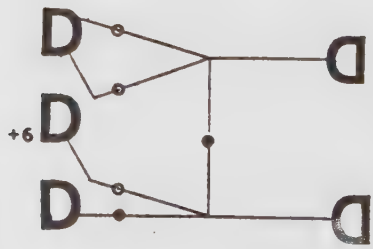


(7.1,24 1.N)

Für /7.,13 e_7/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung:

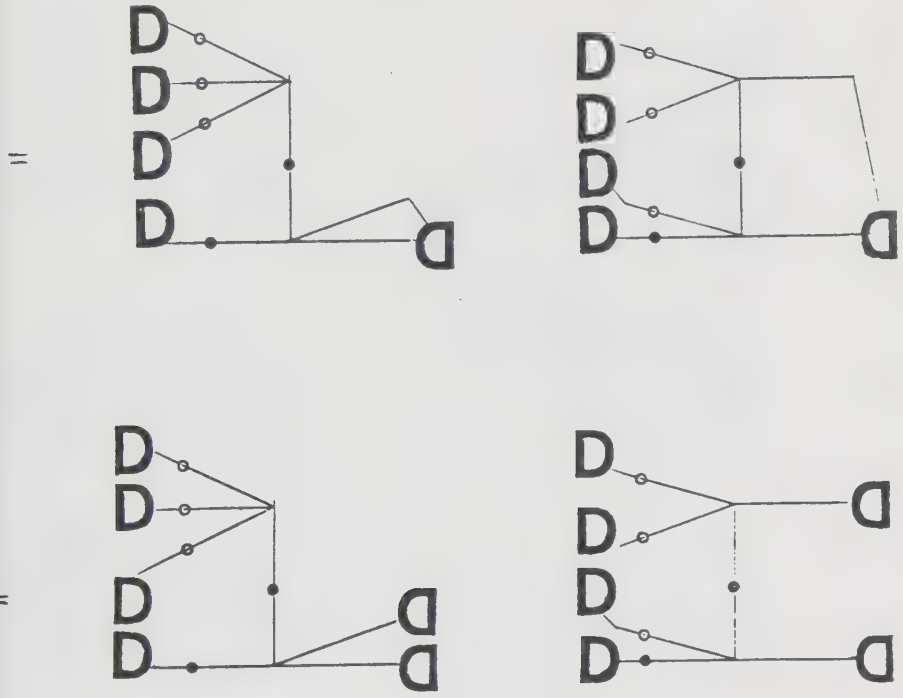


-12 denselben Ausdruck mit F und G vertauscht



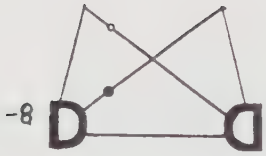
(7.1,25 1.N)

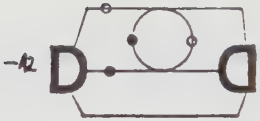
Für /7.,13 e_1 und e_6/ erhält man in erster Näherung nach Umordnung die folgenden zwei Graphen:

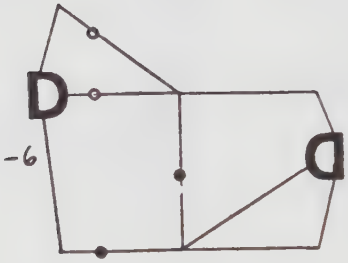


(7.1,26 1.N)

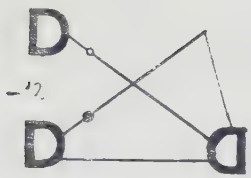
Es bleibt die Erörterung der Matrizen /7.,13 c/.
Auf den folgenden Seiten werden die Graphen für die Matrizen /7.,13 c_1 bis c_9/ nach Umordnung in erster Näherung wiedergegeben:



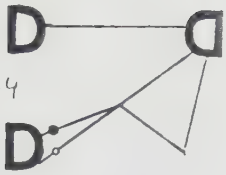




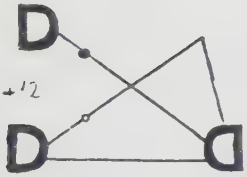
(7.1,27 1.N)



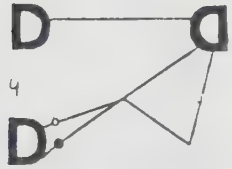
−12



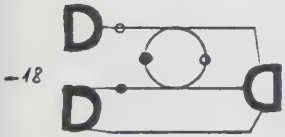
−4



+12

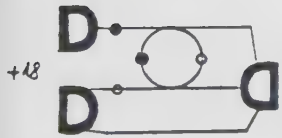


+4



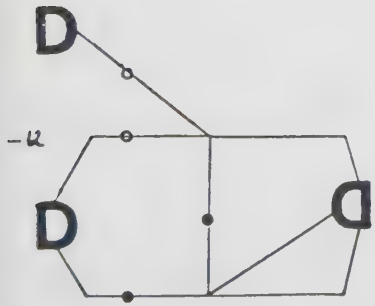
−18

−6

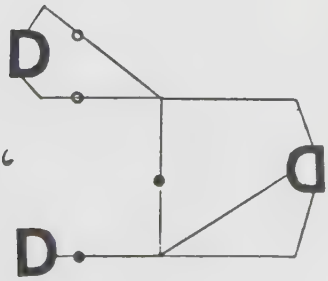


+18

+6

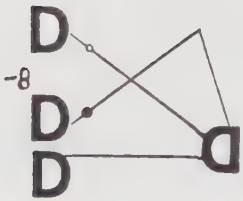


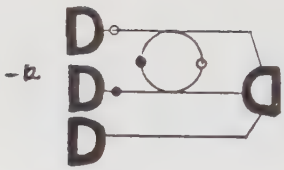
−12

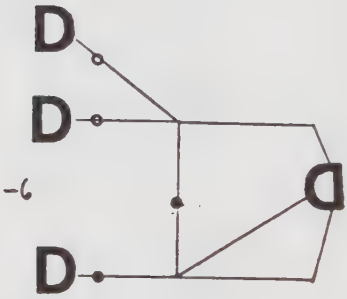


−6

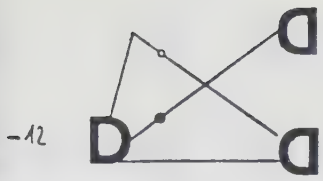
(7.1,28 1.N)

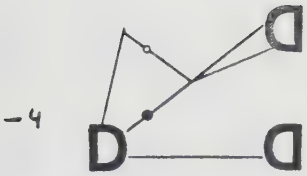


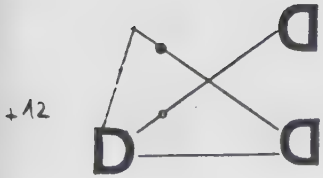


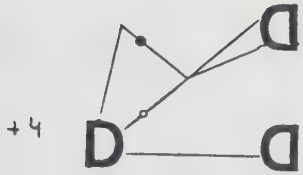


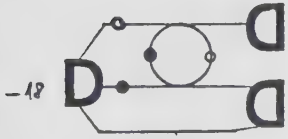
(7.1,29 1.N)

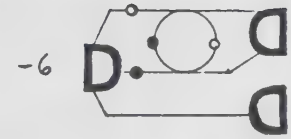


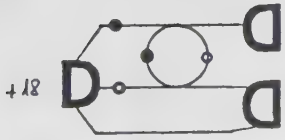


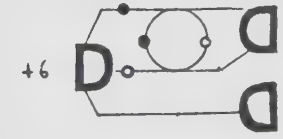


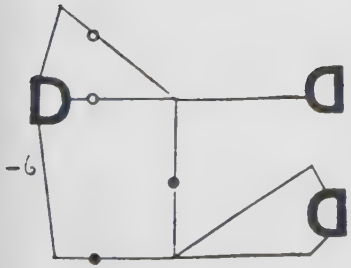


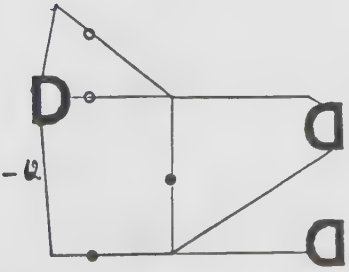




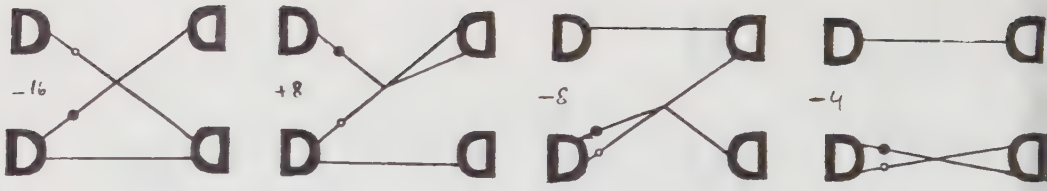


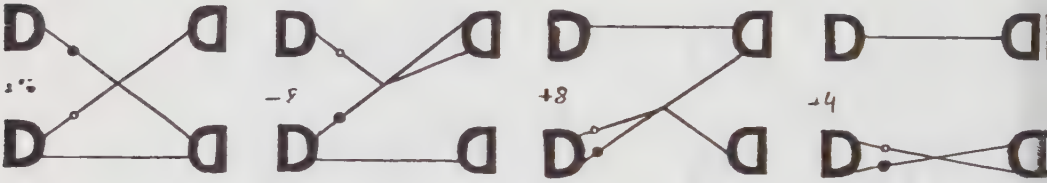


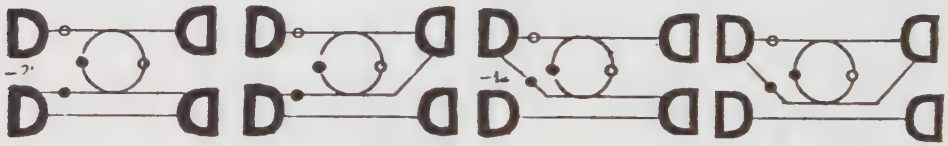


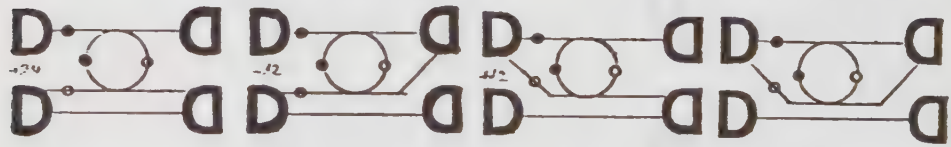


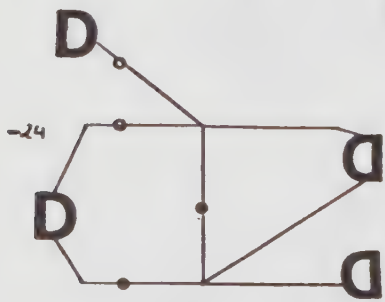
(7.1,30 1.N)

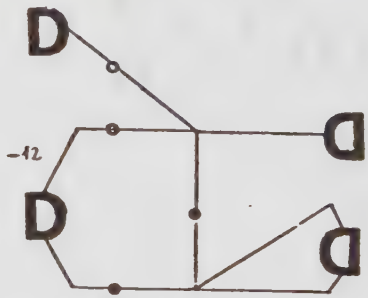

-16
+8
-8
-4

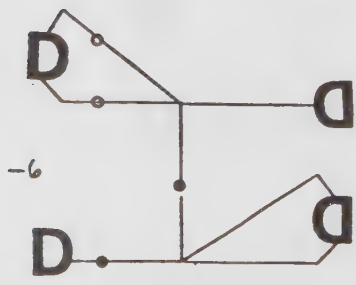

-8
+8
+4

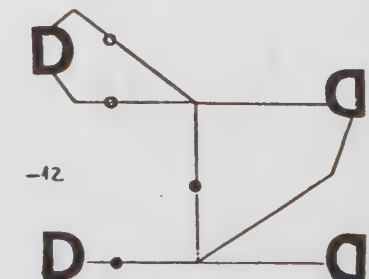


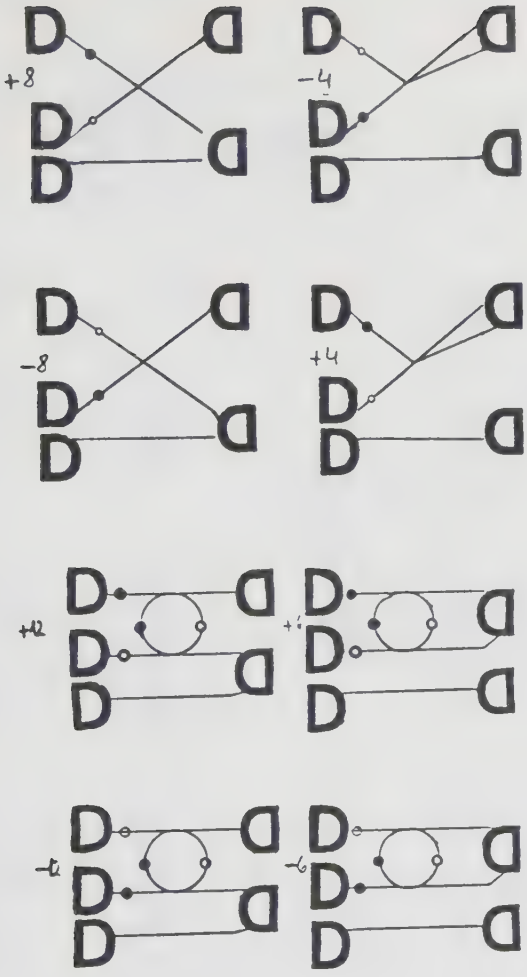

+24
-12
+12

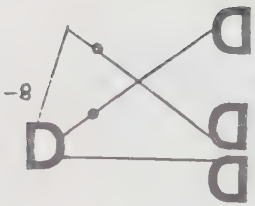

-24

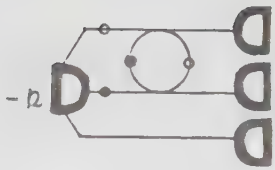

-12

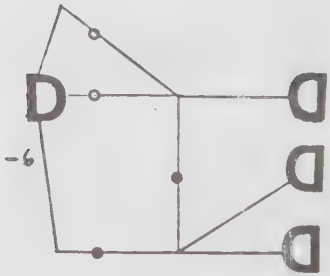

-6


-12

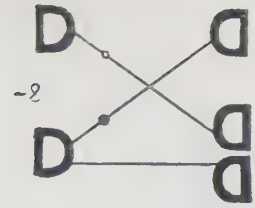

+8
-4
-8
+4
+12
-6
-6
-12

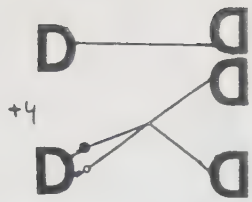


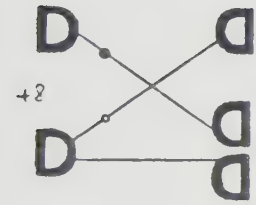


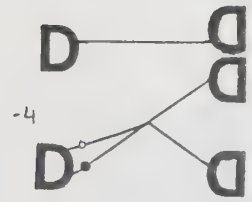


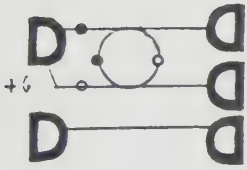
(7.1,33 1.N)

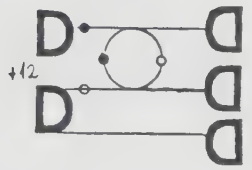


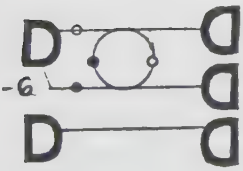


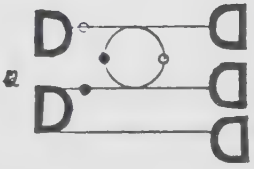


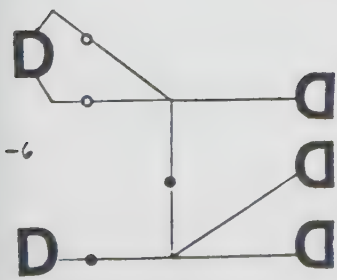


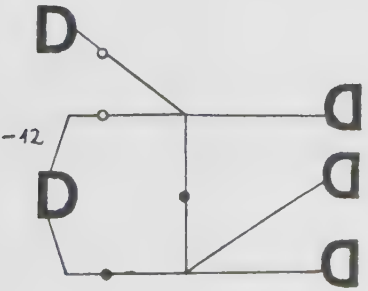




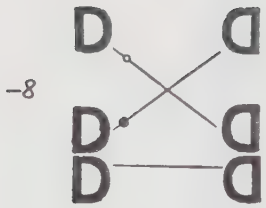


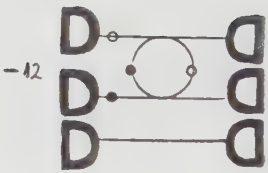


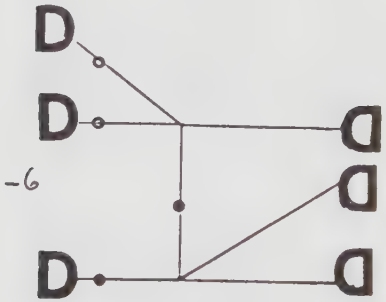




(7.1,34 1.N)

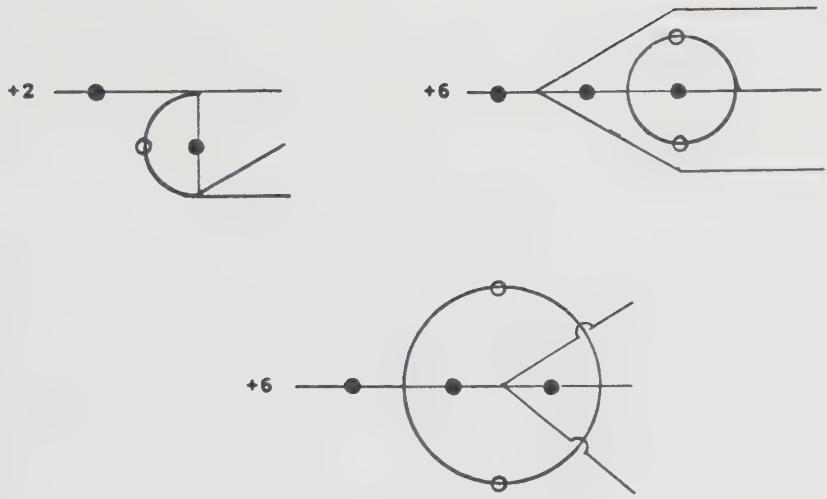






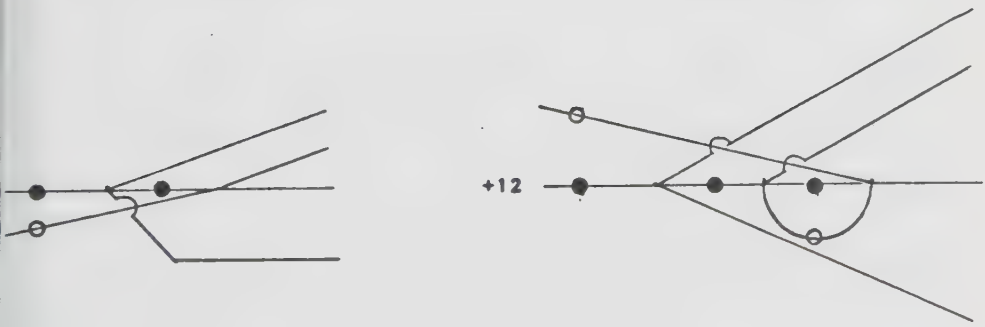
(7.1,35 1.N)

In zweiter Näherung erhält man neben den vorher aufgezeigten Graphen zu den Matrizen /7.,13/ weitere Graphen, die wir noch nicht berücksichtigt haben. Im Gegensatz zu den vorher behandelten Graphen, die Reaktionen beschreiben, bei denen die Teilchen vor dem Prozeß sich auf einer niedrigeren oder einer gleichen Energiestufe befinden verglichen mit den Teilchen nach dem Prozeß, beschreiben nun diese Graphen Prozesse, bei denen die Teilchen vor dem Prozeß sich auf einer höheren Energiestufe befinden verglichen mit den Teilchen nach dem Prozeß. Man könnte diese Prozesse als implodierende Jets bezeichnen. Solche Typen von Graphen sind meines Wissens nach aus anderen Theorien nicht bekannt. Sie lauten in zweiter Näherung:



(7.1,36 2.N)

für einen Übergang D_3 zu D_1 .
Für einen Übergang D_4 zu D_2 erhält man den folgenden Graphen:



8. Die Φ-Funktionen

Die Nukleon-Wellenfunktion ist im Einteilchensektor gegeben durch den Ansatz:

$$|\Phi(j,N)\rangle = \int dx \; \Phi(^{x}_{\alpha} N)\, j_{\alpha}(x)$$

Unter Berücksichtigung der in den Abschnitten /5.4.1 bis 3/ gemachten Ansätze kann die Φ-Funktion folgendermaßen dargestellt werden:

$$\Phi(^{x}_{\alpha} N) = \lambda^{F}_{\alpha}\; T^{N}_{\alpha}\; u_{\alpha}(\vec{\jmath},s_3)\; e^{-i\vec{\jmath}x} = \ddot{u}_{\alpha}(\vec{\jmath})\, e^{-i\vec{\jmath}x} \qquad (8.,1)$$

Hierbei ist λ^{F}_{α} die Baryonenzahleigenfunktion zu der Baryonenzahl B=1 /5.4.1,4/; T^{N}_{α} die Isospineigenfunktion zu B=1 und der Isospinzahl $I=\frac{1}{2}$, wobei für $I_3 = \frac{1}{2}$ $T^{Proton} = \binom{1}{0}$ und für $I_3 = -\frac{1}{2}$ $T^{Neutron} = \binom{0}{1}$ ist; $u_{\alpha}(\vec{\jmath},s_3)$ ist der Diracspinor für Spin $s=\frac{1}{2}$ zur Masse κ und der dritten Komponente des Spins s_3 mit $J^{o} > 0$ (in diesem Abschnitt werden nur Teilchen und keine Antiteilchen betrachtet). Für die Fouriertransformierte der Nukleonenwellenfunktion erhält man aus /8.,1/:

$$\tilde{\Phi}(^{q}_{\alpha}|a) = (2\pi)^4 \; \delta^4(q-\vec{\jmath})\; \ddot{u}_{\alpha}(\vec{\jmath}|N) \qquad (8.,2)$$

Die Wellenfunktion im Zweiteilchensektor läßt sich analog berechnen. Betrachtet man auch hier die Abschnitte /5.4.1 bis 3/, so erhält man die Bosonenwellenfunktion $\Phi(^{x_1 x_2}_{\alpha_1 \alpha_2}|B)$. Spaltet man den Gesamtimpuls des Bosons ab, so erhält man:

$$\alpha(^{x_1 x_2}_{\alpha_1 \alpha_2}|B) = e^{-\frac{i}{2}\vec{J}(x_1+x_2)}\; \Phi(^{x_1-x_2}_{\alpha_1 \alpha_2}|B) \qquad (8.,3)$$

bzw. nach Fouriertransformation

$$\tilde{\alpha}(^{p_1 p_2}_{\alpha_1 \alpha_2}|B) = (2\pi)^4 \; \delta(J-p_1-p_2)\; \tilde{\Phi}(^{p_1-\frac{J}{2}}_{\alpha_1 \alpha_2}|B) \qquad (8.,4)$$

mit der Konstanten

$$\hat{\delta}_{\alpha_1 \alpha_2}(B) := \int dq \; \tilde{\Phi}(^{q}_{\alpha_1 \alpha_2}|B) = (2\pi)^4 \; \tilde{\Phi}(^{0}_{\alpha_1 \alpha_2}|B) \qquad (8.,5)$$

Da die dynamische Gleichung unter den Symmetrien, die zu den Quantenzahlen des Bosons gehören, forminvariant ist, wird die Konstante /8.,4/ als Eigenfunktion der Eigenwertgleichungen /5.4,1 bis 6/ angesetzt. Nach Ausreduktion nach der Baryoneneichgruppe erhält man für die Baryonenzahl B=0 unter Beachtung von /5.4.1,11/:

$$\hat{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2}(B) = \hat{\Phi}^{B=0,\,II_3,\,SS_3,\,\pm}_{\alpha_1\alpha_2} = \lambda^{F}_{\alpha_1}\,\lambda^{A}_{\alpha_2}\,\hat{\Phi}^{FA,\,II_3,\,SS_3,\,\pm}_{\alpha_1\alpha_2} - \lambda^{A}_{\alpha_1}\,\lambda^{F}_{\alpha_2}\,\hat{\Phi}^{FA,\,II_3,\,SS_3,\,\pm}_{\alpha_2\alpha_1} \qquad (8.,6)$$

wobei

$$\hat{\Phi}^{FA,\,II_3,\,SS_3,\,\pm}_{\alpha_1\alpha_2} = \tau(II_3)_{\alpha_1\alpha_2}\,e_{\mu}(J,SS_3)\,[\,\hat{\Phi}^{FA,\,I,\,S,\,\pm,\,V}_{(\gamma^{\mu}\beta)_{\alpha_1\alpha_2}} + \hat{\Phi}^{FA,\,I,\,S,\,\pm,\,a}_{(\gamma^{\mu}\gamma_5\,\beta)_{\alpha_1\alpha_2}}\,] \qquad (8.,7)$$

unter Beachtung von /5.4.2,6/ und den analogen Gleichungen für den Spin. Hierbei ist e_{μ} ein Eigenvektor zu Spin 0 und 1, wobei

$$e_{\mu}(J,0,0) = \frac{1}{\sqrt{J^2}}\,J^{\mu} \quad ,$$

$$e_{\mu}(J,1,s_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{J^2}}\,(\vec{J}\,\vec{e}(s_3)),\quad \vec{e}(s_3) + \frac{\vec{J}\,(\vec{J}\,\vec{e}(s_3))}{\sqrt{J^2}\,(J^0+J^2)}\right)$$

und $\vec{e}(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}$,

$$\vec{e}(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$\vec{e}(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix} \qquad (8.,8)$$

V und a erhält man aus der Zerlegung nach der Dirac-Algebra /5.4.4,25/. a wurde in diesem Falle klein geschrieben, um eine Verwechselung mit dem Antifermion-Superindex zu vermeiden. In /8.,7/ erkennt man, daß die spezielle Form des Vertex /4.,21/, die das v-a-Kopplungsschema beschreibt, nur acht der möglichen sechzehn Komponenten zur Wellenfunktion beiträgt.

9. Das funktionale Skalarprodukt

Die Darstellung des Skalarproduktes in H_F erfolgt durch die Expansionskoeffizienten Φ_n des Zustandsfunktionals /5.3,9/ /28/. Die $\Phi_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_n\\ \alpha_1\dots\alpha_n\end{smallmatrix}\right)$ können als Projektionen des Zustandes $|a> \in H_F$ auf die Vektoren ${}_n\!<x_1\dots x_n|$ betrachtet werden:

$$\Phi_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_n\\ \alpha_1\dots\alpha_n\end{smallmatrix}\right) = <\Phi_0|N\,\Psi_{\alpha_1}(x_1)\dots\Psi_{\alpha_2}(x_n)|a> = {}_n\!<x_1\dots x_n|a> \qquad (9.,1)$$

Die Vektoren ${}_n\!<x_1\dots x_n|$ bilden einen natürlichen Basissatz von Zuständen in der nichtlinearen Spinortheorie. Definiert man einen dualen Basissatz $|x_1\dots x_n>^n$ durch die Relation:

$${}_m\!<x_1\dots x_m|x_1'\dots x_n'>^n = \delta_{nm}\frac{1}{(n!)^2}\sum_{\lambda_1\dots\lambda_n}(-1)^p\,\delta(x_1-x_{\lambda_1}')\dots\delta(x_n-x_{\lambda_n}') \qquad (9.,2)$$

sowie andere Basisvektoren, die zu dem natürlichen Basissatz nicht orthonormal sind: $|x_1'\dots x_n'>_n$,
so erhält man beim Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}{}_n\!<x_1\dots x_n|x_1'\dots x_m'>_m &= <\Phi_0|[N\,\Psi_{\alpha_1}(x_1)\dots\Psi_{\alpha_n}(x_n)][N\Psi_{\alpha_1'}(x_1')\dots\Psi_{\alpha_n'}(x_n')]|\Phi_0>\\ &= g_{nm}(x_1\dots x_n|x_1'\dots x_m') \qquad (9.,3)\end{aligned}$$

g_{nm} ist ungleich dem Einheitsoperator.

Benutzen wir diesen Basissatz zur expliziten Zustandsdarstellung, so können die physikalischen Zustände wie folgt dargestellt werden:

$$|a> = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)}\int\sigma_n(x_1\dots x_n|a)\;|x_1\dots x_n>_n\;d^4x_1\dots d^4x_n \qquad (9.,4)$$

$$<b| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)}\int\Phi_n^*(x_1\dots x_n|b)\;{}_n\!<x_1\dots x_n|\;d^4x_1\dots d^4x_n \qquad (9.,4')$$

Das Skalarprodukt in H_F kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$<b|a> = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,n!}\int\sigma_n\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_n\\ \alpha_1\dots\;\;n\end{smallmatrix}|a\right)\Phi_n^*\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_n\\ \alpha_1\dots\;\;n\end{smallmatrix}|b\right)\;d^4x_1\dots d^4x_n \qquad (9.,5)$$

Ferner erhält man aus /9.,4 / durch Multiplikation mit ${}_m\!<x_1'\dots x_m'|$:

$${}_m\!<x_1'\dots x_m'|a> = \Phi_m(x_1'\dots x_m'|a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\sigma_n(x_1\dots x_n|a)\;g_{mn}\;d^4x_1\dots d^4x_n \qquad (9.,6)$$

Durch Inversion von /9.,6/ erhält man:

$$\sigma_n(x_1\dots x_n|a) = m!\sum_{m=1}^{\infty}\int\Phi_m(x_1'\dots x_m'|a)\;g_{nm}^{-1}(x_1\dots x_n|x_1'\dots x_m')\;d^4x_1'\dots d^4x_m' \qquad (9.,7)$$

Setzt man /9.,7/ in /9.,5/ ein, so bekommt man für das Skalarprodukt:

$$< b|a > = \sum_{n,m} \frac{m!}{n!\,n!} \int \Phi_n^*(x_1 \ldots x_n|b)\, g_{nm}^{-1}\, (x_1 \ldots x_n|x_1' \ldots x_m')\Phi_m(x_1' \ldots x_m'|a) \times$$
$$\times\, d^4x_1 \ldots d^4x_n\, d^4x_1' \ldots d^4x_m'$$

und unter Beachtung von /5.2,11/ und /5.3,5/

$$= \int \Sigma < \Phi_n(j,b)|D_n(x_1 \ldots x_n)>\, g_{nm}^{-1} < D_m(x_1' \ldots x_m')|\Phi_m(j,a)>$$
$$= (\Phi_m(j,a)|\Phi_n(j,b)) \quad \text{(siehe /5.3,9/)} \; . \qquad (9.,8)$$

Wegen der Nichtorthogonalität von dem Basisvektorsystem muß ein gewichtetes Skalarprodukt benutzt werden. Es läßt sich außerdem zeigen /24,28/, daß die Sätze $\{\Phi_n\}$ und $\{\sigma_n\}$ ko- und kontravariante Komponenten des Zustandes $|a>$ bilden.

Zur Berechnung des Skalarproduktes ist g_{mn} notwendig. Die Durchführung der Kontraktion des doppelt normalisierten Produktes ergibt unter Beachtung der Wick-Regeln für $m \leq n$:

$$g_{mn} = \sum_{r} \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{möglichen} \\ \text{Kontraktionen}}} (F^+)^{(r)}\, \Phi^{(m-r|n-r)} = \sum_r \frac{m!\,n!}{r!\,(m-r)!\,(n-r)!}\, A\{F_{11'} \ldots F_{rr'} \Phi^{(m-r|n-r)}\}$$

mit A dem Antisymmetrisationsoperator. Man erhält also:

$$= \sum_{r=0}^{m} \sum_{i_1}^{i_m} \sum_{j_1}^{j_n} F^+(x_{i_1} x_{j_1}) \ldots F^+(x_{i_r} x_{j_r})\, \Phi^{(m-r|n-r)}(x_1 \ldots x_{i_1-1} x_{i_1+1} \ldots x_{i_m-1} x_{i_m+1} \ldots x_m|x_1' \ldots)$$

(9.,9)

Für m=n ist g_{mn} gegeben durch

$$g_{mn} = F^+(x_{i_1} x_{j_1}) \ldots F^+(x_{i_m} x_{j_m}) + \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{i_1}^{i_m} \sum_{j_1}^{j_m} F^+(x_{i_1} x_{j_1}) \ldots F^+(x_{i_m} x_{j_m})\, \Phi^{(m-r|n-r)} \qquad (9.,10)$$

und für m < n wird g_{mn} zu:

$$g_{mn} = F^+(x_{i_1} x_{j_1}) \ldots F^+(x_{i_m} x_{j_m})\, \Phi^{(0|n-m)} + \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{i_1}^{i_m} \sum_{j_1}^{j_m} F^+(x_{i_1} x_{j_1}) \ldots F^+(x_{i_m} x_{j_m})\, \Phi^{(m-r|n-r)}$$

(9.,11)

Bei den nun nachfolgend betrachteten Prozessen bleibt die Anzahl der Subteilchen (aus denen die Elementarteilchen aufgebaut sind) vor und nach dem Prozeß konstant, d.h. es werden Annihilisationsprozesse ausgeschlossen. In diesem Falle ist m=n.

Bei der Näherung von g_{mm} durch den ersten Term der Entwicklung /9.,10/ folgt für /9.,6/:

$$\Phi_m(x_1'\ldots x_m'|a) = m!\int F^+(x_1'x_1)\ldots F^+(x_m'x_m)\;\sigma_m(x_1\ldots x_m|a)\,d^4x_1\ldots d^4x_m \qquad (9.,12)$$

Durch die Spektralzerlegung von F^+ /4.8,4/ kann ein inverses $(F^+)^{-1}$ konstruiert werden. Somit wird für /9.,7/

$$\sigma_m(x_1\ldots x_m|a) = \frac{1}{m!}\int (F^+(x_1x_1'))^{-1}\ldots\,(F^+(x_mx_m'))^{-1}\;\Phi_m(x_1'\ldots x_m')\,d^4x_1'\ldots d^4x_m' \qquad (9.,13)$$

9.1 S - Matrix und funktionales Skalarprodukt

Die S-Matrix ist durch /5.3,10/ gegeben. Drücken wir die S - Matrix durch Φ- und σ- Funktionen aus, so lautet sie im Impulsraum:

$$S(p_1\ldots p_n) = \langle a^-|b^+\rangle = \int \Phi^-(p_1\ldots p_n)^*\;\sigma^+(p_1\ldots p_n)\;dx\,dx' \qquad (9.1,1)$$

Spalten wir $\Phi^{\pm}$ in einen freien und einen nichtfreien Anteil auf, so erhält man unter Beachtung der Linearität von /9.,13/ und unter Berücksichtigung, daß sowohl der freie Anteil als auch der nicht freie Anteil von Φ /9.,12/ genügen muß:

$$\begin{aligned}S(p_1\ldots p_n) =& \int \Phi(p_1)^*\ldots\,\Phi(p_n)^*\;\sigma(p_1)\ldots\,\sigma(p_n)\;dx_1\ldots dx_n\\ &+\int \Phi(p_1)^*\ldots\,\Phi(p_n)^*\;F^+(p_1)^{-1}\ldots F^+(p_n)^{-1}\;\tilde{\Phi}^+(p_1\ldots p_n)\\ &+\int \tilde{\Phi}^-(p_1\ldots p_n)^*\;\sigma(p_1)\ldots\,\sigma(p_n)\\ &+\int \tilde{\Phi}^-(p_1\ldots p_n)^*\;F^+(p_1)^{-1}\ldots F^+(p_n)^{-1}\;\tilde{\Phi}^+(p_1\ldots p_n)\end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\Phi^*(F^+)^{-1} = ((F^+)^{-1}\Phi)^*$ und /9.,13/, so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}=& \int \Phi(p_1)^*\ldots\,\Phi(p_n)^*\;\sigma(p_1)\ldots\,\sigma(p_n)\;dx_1\ldots dx_n\\ &+\int \sigma(p_1)^*\ldots\,\sigma(p_n)^*\;\tilde{\Phi}^+(p_1\ldots p_n)\qquad dx_1\ldots dx_n\\ &+\int \tilde{\Phi}^-(p_1\ldots p_n)^*\;\sigma(p_1)\ldots\,\sigma(p_n)\qquad dx_1\ldots dx_n\\ &+\int \tilde{\Phi}^-(p_1\ldots p_n)^*\;F^+(p_1)^{-1}\ldots F^+(p_n)^{-1}\;\tilde{\Phi}^+(p_1\ldots p_n)\;dx_1\ldots dx_n\end{aligned}$$

9.2 Herleitung der σ - Funktionen aus dem Propagator

Die Herleitung der σ - Funktionen nach einem von Horrix vorgeschlagenen Verfahren wurde von Herzog /D1/ zum ersten Male für den Propagator durchgeführt. Dabei geht man von /4.8,4/ aus. Nach der Fouriertransformation sehen die Einteilchen - φ - funktionen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\phi_n &= (2\pi)^4 \delta^4(p-q)\, u^s(p,\kappa)\, k_1 \\
\phi_g &= (2\pi)^4 \delta^4(p-q)\, u^s(p,\mu)\, k_2 \\
\phi_d &= (2\pi)^4 \delta^4(p-q)\, u^s(p,\mu)\, \left(\frac{1}{\mu-\kappa} - \frac{1}{2w_\mu^2} - \frac{\gamma^0}{2w_\mu} - \frac{ix^0}{w_\mu}\right) k_3
\end{aligned} \qquad (9.2,1)$$

mit

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1 \\
k_2 &= 1 \\
k_3 &= 1
\end{aligned} \qquad (9.2,2)$$

Macht man für die σ - Funktionen folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
\sigma_n(q) &= (2\pi)^3 \delta^3(p-q)\, u^s(p,\kappa)\, k_1^{-1}\, f_n(q^0) \\
\sigma_g(q) &= (2\pi)^3 \delta^3(p-q)\, u^s(p,\mu)\, k_2^{-1}\, f_g(q^0) \\
\sigma_d(q) &= (2\pi)^3 \delta^3(p-q)\, u^s(p,\mu)\, k_3^{-1}\, f_d(q^0)
\end{aligned} \qquad (9.2,3)$$

wobei die f - Funktionen unbestimmt sind, so erhält man unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen zwischen Teilchen, Geister und Dipolgeisterzuständen / D 1 /

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-4} \int \phi_n(q)^* \sigma_n(q)\, dq &= (2\pi)^3 w_k \delta^3(p'-p) \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_g(q)^* \sigma_n(q)\, dq &= 0 \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_d(q)^* \sigma_n(q)\, dq &= 0 \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_n(q)^* \sigma_g(q)\, dq &= 0 \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_g(q)^* \sigma_g(q)\, dq &= 0 \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_d(q)^* \sigma_g(q)\, dq &= (2\pi)^3 w_\mu \delta^3(p'-p) \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_n(q)^* \sigma_d(q)\, dq &= 0 \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_g(q)^* \sigma_d(q)\, dq &= (2\pi)^3 w_\mu \delta^3(p'-p) \\
(2\pi)^{-4} \int \phi_d(q)^* \sigma_d(q)\, dq &= 0
\end{aligned} \qquad (9.2,4)$$

für die f-Funktionen:

$$f_n(q^\circ) = \frac{(q^\circ - w_\mu)^2}{(w_k - w_\mu)^2} \; e^{-(q^\circ - w_k)^2} \; w_k$$

$$f_g(q^\circ) = \frac{(q^\circ - w_k)(q^\circ - w_\mu)}{(w_k - w_\mu)^2} \; (-w_\mu^2) \; e^{-(q^\circ - w_\mu)^2}$$

$$f_d(q^\circ) = \frac{(q^\circ - w_k)}{(w_k - w_\mu)^2} \{ w_\mu + (q^\circ - w_\mu) [w_\mu^2 \left(\frac{1}{\mu - \kappa} - \frac{1}{2 w_\mu^2} - \frac{\gamma^\circ}{2 w_\mu} \right) - \frac{w_\mu}{w_\mu - w_k}] \} \otimes$$

$$\otimes \; e^{-(q^\circ - w_\mu)^2} \qquad (9.2,5)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die f-Funktionen an sich nur an den Stellen w_k und w_μ definiert sind. Diese Einschränkung ermöglicht überhaupt, die $(F^+)^{-1}$ konsistent zu berechnen.

9.3 Die Normierung des Skalarproduktes

Zur Berechnung der Norm der in dieser Arbeit auftretenden Skalarproduktzustände geht man folgendermaßen vor: Man berechnet die Norm des freien Diracfeldes im Einteilchensektor, verallgemeinert dieses Resultat auf den N-Teilchensektor und berechnet anschließend die Norm des Bosonenfunktionals. Alle diese Normierungen sind relativistisch invariant zu betrachten.

9.3.1 Die Normierung des freien Dirac-Feldes im Einteilchensektor

Die Norm des freien Dirac-Feldes im Einteilchensektor ist gegeben durch:

$$\langle J(b) | J(a) \rangle = \int d^4 q_1 \; \tilde{\phi}^*(q_1 | b) \; \tilde{\sigma}(q_1 | a) \; C_1 = 1 \qquad (9.3.1,1)$$

und unter Berücksichtigung von /4.8,4/und/9.,13/ erhält man nach Fouriertransformation:

$$F^+_{\alpha\beta}(x-y) = \int d^3p \; d^4q \; d^4q' \; F^+_{\alpha\gamma}(q) \; F^+_{\delta\beta}(q') \; e^{iqx} \; e^{-iq'y} \otimes$$

$$\otimes [\frac{-i \kappa}{(2\pi)^3 (\mu - \kappa)^2 w_\kappa} \; \tilde{\sigma}_n(q_\gamma) \; \tilde{\sigma}^*_n(q'_\delta)$$

$$+ \frac{i \mu}{(2\pi)^3 (\mu - \kappa) w_\mu} \; \tilde{\sigma}_g(q_\gamma) \; \tilde{\sigma}^*_d(q'_\delta)$$

$$+ \frac{i \mu}{(2\pi)^3 (\mu - \kappa) w_\mu} \; \tilde{\sigma}_d(q_\gamma) \; \tilde{\sigma}^*_g(q'_\delta)] \qquad (9.3.1,2)$$

Für $q = q'$ erhält man dann in ausführlicher Schreibweise:

$$F^{+\,-1}_{\gamma\delta}(q) = \sum_s \int d^3p \Big[\frac{-i}{(2\pi)^3} \frac{\kappa}{(\mu-\kappa)^2\, w_\kappa} \tilde{\sigma}_n(q_\gamma)\, \tilde{\sigma}^*_n(q_\delta) + \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{(\mu-\kappa)\, w_\mu} \tilde{\sigma}_g(q_\gamma)\, \tilde{\sigma}^*_d(q_\delta) + \frac{i\mu}{(2\pi)^3} \frac{}{(\mu-\kappa)\, w_\mu} \tilde{\sigma}_d(q_\gamma)\, \tilde{\sigma}^*_g(q_\delta) \Big] \qquad (9.3.1,3)$$

Diese letzte Formel wird zur Berechnung von /9.1.1,1/ gebraucht.

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \int d^4q_1\, \tilde{\phi}^*(q_{\alpha_1 1})\; F^{+\,-1}_{\alpha_1\beta_1}\; \tilde{\phi}(q_{\beta_1 1})\; C_1 = 1 \qquad (9.3.1,4)$$

Unter Beachtung von /9.2,4/ erhält man für das Skalarprodukt der Normierung:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = C_1 \sum_s \int d^3p \Big[\frac{-i\,\kappa}{(2\pi)^3 (\mu-\kappa)^2\, w_{\kappa_1}} \Big] (2\pi)^{14}\, w^2_{\kappa_1}\, \delta^3(p-p')\, [u^{*s}(p',\kappa)\; u^s(p,\kappa)]^2 \qquad (9.3.1,5)$$

Wegen /9.3.1,4/ wird C_1 zu:

$$C_1 = \frac{4\kappa\, i\,(\mu-\kappa)^2}{(2\pi)^{11}\, w_{\kappa_1}} \qquad (9.3.1,6)$$

9.3.2 Die Normierung des freien Diracfeldes im N-Teilchen-Fall

Im N-Teilchenfall geht man analog zum 1-Teilchenfall vor. Das Normierungsskalarprodukt ist:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \int d^4q_1 \ldots d^4q_n\; \tilde{\phi}^*(q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|b)\;\; \tilde{\sigma}(q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|a)\; C_1 \ldots C_n \qquad (9.3.2,1)$$

mit dem Ansatz für freie Wellenfunktionen

$$\tilde{\phi}(q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|b) = \delta_{n,n_b}\, (n!)^{-0.5} \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (-1)^{P_\lambda}\, \tilde{\phi}(q_{\alpha_1}|b_{\lambda_b}) \ldots \tilde{\phi}(q_{\alpha_n}|b_{\lambda_b}) \qquad (9.3.2,2)$$

$$\tilde{\sigma}(q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|a) = \delta_{n,n_a}\, (n!)^{-0.5} \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (-1)^{P_\lambda}\, \tilde{\sigma}(q_{\alpha_1}|a_{\lambda_a}) \ldots \tilde{\sigma}(q_{\alpha_n}|a_{\lambda_a})$$

erhält man schließlich für /9.3.2,1/

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \int d^4q_1 \ldots d^4q_n\; d^3p \sum_s (n!)^{-1}\; \delta_{n_a,n_b} \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (-1)^{P_\lambda} \cdot \Big[\tilde{\phi}^*(q_{\alpha_1}|b_{\lambda_1})\; F^{+\,-1}_{\alpha_1\beta_1}\; \tilde{\phi}(q_{\beta_1}|a_{\lambda_1}) \Big] C_1 \cdot \ldots \cdot \Big[\tilde{\phi}^*(q_{\alpha_n}|b_{\lambda_n})\; F^{+\,-1}_{\alpha\beta}\; \tilde{\phi}(q_{\beta_n}|a_{\lambda_n}) \Big] C_n \qquad (9.3.2,3)$$

Insofern erhält man für /9.3.2,3/:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \delta_{n_a,n_b}\,(n!)^{-1}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(-1)^{P_\lambda}\prod_{i=1}^{n}\delta(p-p')\;\delta_{r_\lambda^a,\,r_\lambda^b} \qquad (9.3.2,4)$$

Hierbei steht r für die Isospin- und Spinquantenzahlen.

9.3.3 Relativistisch invariante Normierung des Bosonenfunktionals

Auch hier gehen wir analog zu dem vorigen Fall. Allerdings handelt es sich hier nicht um freie Wellenfunktionen. Die Norm ist durch das Skalarprodukt:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \int d^4q_1\; d^4q_2\;\; \tilde{\phi}^*(q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}|b)\;\; \tilde{\sigma}(q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}|a)\;\; C_1\,C_2 \qquad (9.3.3,1)$$

gegeben. Unter Beachtung von /9.,13/ sowie /9.3.1,3/ erhält man für das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\langle J(b)|J(a)\rangle = \frac{1}{2}\int d^4q_1\; d^4q_2\; d^3p\; d^3p'\;\; \sum_{ss'}\tilde{\phi}^*(q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}|b)\;\; C_1\,C_2\;\cdot\\ \cdot\,[\,k_1\,\tilde{\sigma}_n(q_{\alpha_1})\,\tilde{\sigma}_n^*(q_{\beta_1}) + K_1\,\tilde{\sigma}_g(q_{\alpha_1})\,\tilde{\sigma}_d^*(q_{\beta_1}) + K_1\,\tilde{\sigma}_d(q_{\alpha_1})\,\tilde{\sigma}_g^*(q_{\beta}\\ \cdot\,[\,k_2\,\tilde{\sigma}_n(q_{\alpha_2})\,\tilde{\sigma}_n^*(q_{\beta_2}) + K_2\,\tilde{\sigma}_g(q_{\alpha_2})\,\tilde{\sigma}_d^*(q_{\beta_2}) + K_2\,\tilde{\sigma}_d(q_{\alpha_2})\,\tilde{\sigma}_g^*(q_{\beta}\\ \cdot\;\tilde{\phi}(q_{\beta_1}q_{\beta_2}|a)\end{aligned} \qquad (9.3.3,2)$$

mit

$$k_{1/2} = \frac{-i\kappa}{(2\pi)^3(\mu-\kappa)^2\,w_{\kappa_{1/2}}}$$

$$K_{1/2} = \frac{+i\mu}{(2\pi)^3(\mu-\kappa)\,w_{\mu_{1/2}}}$$

$$C_{1/2} = \frac{+i\,(\mu-\kappa)^2\sqrt{2}\,4\kappa}{(2\pi)^{11}\,w_{\kappa_{1/2}}}$$

oder allgemein für den n-ten Sektor: (9.3.3,3)

$$C_i = \frac{i\,(\mu-\kappa)^2\sqrt[n]{n!}\;4\kappa}{(2\pi)^{11}\,w_{\kappa_i}} \qquad i\le n$$

Beachtet man ferner, daß bei der Viererintegration nur bestimmte f-Funktionen-Kombinationen möglich sind, so erhält man schließlich für /9.3.3,2/:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \frac{1}{2}\int d^3p\, d^3p'\, C_1C_2\, [k_1\bar{C}^{nn}_{\circ} + K_1\bar{C}^{gd}_{\circ} + K_2\bar{C}^{dg}_{\circ}]\,[k_1C^{nn}_{\circ} + K_1C^{gd}_{\circ} + K_2C^{dg}_{\circ}] \qquad (9.3.3,4)$$

bzw.:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \frac{1}{2}\int d\mathfrak{p}\, d\mathfrak{p}'\, C_1C_2\,[k_1k_1\,\bar{C}^{nn}C^{nn} + k_1K_1\bar{C}^{ng}C^{nd} + k_1K_2\bar{C}^{nd}C^{ng} + K_1k_1\,\bar{C}^{gn}C^{dn} + K_1K_1\bar{C}^{gg}C^{dd} + K_1K_2\bar{C}^{gd}C^{dg} + K_2k_1\,\bar{C}^{dn}C^{gn} + K_2K_1\bar{C}^{dg}C^{gd} + K_2K_2\bar{C}^{dd}C^{gg}] \qquad (9.3.3,4')$$

mit

$$C^{j_1j_2} = \int d^4q_1\, d^4q_2\; \tilde{\sigma}_{j_1}(\beta_1^{q_1})\; \tilde{\sigma}^{*}_{j_2}(\beta_2^{q_2})\; \tilde{\Phi}(\beta_1^{q_1}\beta_2^{q_2})$$
$$\bar{C}^{i_1i_2} = \int d^4q_1\, d^4q_2\; \tilde{\sigma}_{i_1}(\alpha_1^{q_1})\; \tilde{\sigma}_{i_2}(\alpha_2^{q_2})\; \tilde{\Phi}^{*}(\alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}) \qquad (9.3.3,5)$$

Da

$$\lambda^F_\alpha \lambda^{F^*}_\alpha = 1 \qquad \lambda^F_\alpha \lambda^F_\alpha = 0$$
$$\lambda^A_\alpha \lambda^{A^*}_\alpha = 1 \qquad \lambda^A_\alpha \lambda^A_\alpha = 0$$
$$\lambda^F_\alpha \lambda^{A^*}_\alpha = 0 \qquad \lambda^F_\alpha \lambda^A_\alpha = 1 \qquad (9.3.3,6)$$

erhält man z.B. für $C^{j_1j_2}(p,p')$ (siehe auch /11.2,7/ und Abschnitt 8):

$$C^{j_1j_2}(p,p') = i\,L^2\,(3-l^3(l^3+1))\int \delta^3(J-p-p')\;\delta^0(J-q_1-q_2)$$
$$f_{j_1}(q_1^\circ)\; f_{j_2}(q_2^\circ)\; \ddot{u}_{B_1}(p,\kappa)\; \ddot{u}_{B_2}(p',\kappa)\;\otimes$$
$$\otimes\Big\{-\lambda^A_{B_1}\lambda^F_{B_2}\Big(\frac{\{\not{q}_2[\not{e}^V+\gamma_5\not{e}^{PV}]\tau(11_5)\not{\epsilon}(SS_3)(\not{q}_1-\kappa)(\not{q}_1-\mu)^2\beta\}_{B_2B_1}}{(q_2^2+i\varepsilon)(q_1^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$
$$+\frac{\{\not{q}_1[\not{e}^V+\gamma_5\not{e}^{PV}]\tau(11_5)\not{\epsilon}(SS_3)(\not{q}_2-\kappa)(\not{q}_2-\mu)^2\beta\}_{B_2B_1}}{(q_1^2+i\varepsilon)(q_2^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\Big)$$
$$+\lambda^F_{B_1}\lambda^A_{B_2}\,(\not{q}_1 \leftrightarrow \not{q}_2)\Big\}\,d^4q_1\,d^4q_2$$

Analog läßt sich $\bar{C}^{i_1i_2}$ aufstellen. (9.3.3,7)

$$\bar{C}^{i_1 i_2}_{\cdots}(p,p') = -i\,L^2\,(3-l^b(l^b+1))\int \delta^3(J-p-p')\qquad \delta^3(J-q_1-q_2)$$

$$f_{\alpha_1}(q_1^\circ)\;f_{\alpha_2}(q_2^\circ)\;\ddot{u}^{*}_{\cdots}(p,\kappa)\;\ddot{u}^{*}_{\cdots}(p',\kappa)\;\boxtimes$$

$$\boxtimes\Big\{-\lambda^A_{\alpha_1}\lambda^F_{\alpha_2}\Big(\frac{\{\not q_2^{*}[\phi^{V*}-\gamma_5\phi^{PV*}]\tau(I\,I_3)\,\not\varepsilon^{*}(SS_3)\,(\not q_1-\kappa)^{*}(\not q_1-\mu)^{*2}\beta\}_{\alpha_2\alpha_1}}{(q_2^2+i\varepsilon)\,(q_1^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$+\frac{\{\not q_1^{*}[\phi^{V*}-\gamma_5\phi^{PV*}]\tau(I\,I_3)\,\not\varepsilon^{*}(SS_3)\,(\not q_2-\kappa)^{*}(\not q_2-\mu)^{*2}\beta\}_{\alpha_1\alpha_2}}{(q_1^2+i\varepsilon)\,(q_2^2-\kappa^2+i\varepsilon)\,(q_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\Big)$$

$$+\lambda^F_{\alpha_1}\lambda^A_{\alpha_2}\;(\not q_1 \leftrightarrow \not q_2)\Big\}\,d^4q_1\,d^4q_2$$

(9.3.3,8)

Beachtet man die Unitaritätsbedingungen /10.2,1/, so erhält man für /10.3.3,4'/ schließlich:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \frac{1}{2}\int d^3p\;d^3p'\;\;k_1\,k_2\;\;C_1\,C_2\;\;\bar{C}^{nn}\,C^{nn}$$

(9.3.3,9)

Vollzieht man in /9.3.3,7 und 8/ die Viererintegrationen und setzt die Ergebnisse in /9.3.3,9/ ein, so erhält man Integration über d^3p' unter Beachtung der Deltafunktion:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \frac{1}{4}\;C_1^2\;C_2^2\;k_1^2\;k_2^2\;\ddot{u}_{\beta_1}(p)\,\ddot{u}^{*}_{\alpha_1}(p)\,\ddot{u}_{\beta_2}(J-p)\,\ddot{u}^{*}_{\alpha_2}(J-p)\qquad \pi^2$$

$$\frac{L^4}{(2\pi)^6}\;(3-l^a(l^a+1))\,(3-l^b(l^b-1))\;\;w^2_{k_1}\;\;w^2_{k_2}\;\;\frac{\phi^{V\,2}+\phi^{PV\,2}}{\kappa^4\,(\kappa^2-\mu^2)^4}$$

$$\int d^3p\;\mathrm{Tr}\Big[\frac{(J-p)(J-p)(p-\kappa)(p-\kappa)(p-\mu)^2(p-\mu)^2\;\not\varepsilon\,\not\varepsilon}{w^2_{k_2}}$$

$$+\frac{(J-p)\;p\;(p-\kappa)\;((J-p)+\kappa)(p-\mu)^2((J-p)+\mu)^2\;\not\varepsilon\not\varepsilon}{w_{k_2}\,w_{k_1}}$$

+ (siehe nächste Seite)

$$+\frac{p\,(J-p)\,((J-p)+\kappa)\,(p-\kappa)\,((J-p)+\mu)^2\,(p-\mu)^2\,\not{\epsilon}\,\not{\epsilon}}{w_{k_1}\;w_{k_2}}$$

$$+\frac{p\,p\,((J-p)+\kappa)\,((J-p)+\kappa)((J-p)+\mu)^2((J-p)+\mu)^2\,\not{\epsilon}\,\not{\epsilon}}{w_{k_1}^2}\Bigg]\Bigg\}$$

(9.3.3,10)

Nach Ausführung der Integration erhält man schließlich:

$$\langle J(b)|J(a)\rangle = \frac{L^4\,\kappa^4}{2^{28}\;\pi^{34}}\quad(3-l(l+1)^2\quad(\ddot{u}\;\ddot{u}^*)^2\quad(\phi^{V\,2}+\phi^{PV\,2})$$

$$\Big\{(J^2+\kappa^2)(2\kappa^2)(\kappa^2+\mu^2)^2 + \kappa^2(J^2+2\kappa^2)((J^2+\kappa^2+\mu^2)^2+4J^2\kappa^2)$$

$$+\kappa^2(8J^2\kappa^2(J^2+\kappa^2+\mu^2)) + \kappa^2(\kappa^2+\mu^2)(6J^2\kappa^2+(2\kappa^2+J^2)(J^2+\kappa^2+\mu^2))\Big\}$$

$$\frac{\pi}{3\quad\sin(\frac{3\pi}{2})}$$

(9.3.3,11)

Man erkennt, daß man in diesem Falle für die verschiedenen Teilchen mit unterschiedlicher Parität stets positive Norm erhält.

Bei der Viererintegration bleibt nur noch zu zeigen, daß das das Halbkreisintegral für $R\to\infty$ gegen Null strebt. Man kann folgende Abschätzung treffen mit $p = R(\cos\xi + i\sin\xi)$:

$$\left|\int_0^\pi d\xi\;\frac{R(-\sin\xi+i\cos\xi)\;[J-R(\cos\xi+i\sin\xi)]\,[R(\cos\xi+i\sin\xi)-\kappa]\,[R(\cos\xi+i\sin\xi)-\mu]^2}{[J-R(\cos\xi+i\sin\xi)]^2\,[R^2(\cos\xi+i\sin\xi)^2-\kappa^2]\,[R^2(\cos\xi+i\sin\xi)^2-\mu^2]^2}\right|$$

$$\leq \frac{\pi\quad R^6}{[J^2+R^2]\,R^6} \qquad (9.3.3,12)$$

10. Die Unitarisierung

In /27/ und /28/ verbesserte und entwickelte Stumpf die Ideen weiter, die von Karowski /172+173/ aufgestellt wurden.

Die Einführung von Geister- und Dipolgeistzuständen führt zur indefiniten Metrik, wie man an der Diagonalisation von /4.8,8/ erkennt. Dadurch wird jede Art von Wahrscheinlichkeitsinterpretation des Zustandsraumes wie in den konventionellen Theorien mit positiv-definiter Metrik verhindert. Zur Eliminierung dieses unphysikalischen Sachverhaltes aus der Theorie wurde von Karowski /173/ und Stumpf /27+28/ die Unitarisierungsprozedur in die nichtlineare Spinortheorie eingeführt. Stumpf griff dabei den grundlegenden Gedanken auf, daß eine unitäre S-Matrix durch die Beimischung von Geisterzuständen mit verschwindender Norm erreicht werden kann. Stumpf wies dabei nach, daß die Rechnungen von Karowski fehlerhaft waren. Es ist insbesondere nicht möglich, gleichzeitig die strengen kinematischen Bedingungen, welchen die hinzugefügten Matrixelemente unterliegen, und die Unitaritätsbedingungen zu erfüllen. Stumpf und Scheerer /28/ korrigierten diesen Fehler, indem sie die Beimischung guter Geister schon im Zustand vornahmen. Die einzige dabei übrig bleibende schwächere kinematische Bedingung ist die Viererimpulserhaltung. Sowohl diese Bedingung als auch die Unitaritätsbedingungen können gleichzeitig erfüllt werden. Nachfolgend werden die von Stumpf zur Unitarisierung vorgeschlagenen und durchgeführten Methoden im $p = 2$ - Sektor kurz skizziert und für den Fall $\kappa = \mu$ erweitert. Außerdem werden die Berechnungen im $p = 3$ - Sektor durchgeführt. Da in der nichtlinearen Spinortheorie die verschiedenen Teilchensektoren jeweils einzeln konstruiert werden, gibt es keine Prozedur, um alle Sektoren gleichzeitig zu unitarisieren. Man muß vielmehr die Zustandsvektoren jedes Sektors getrennt betrachten.

10.1 Die Unitarisierungsprozedur im $\rho = 2$ - Sektor

Durch die Dynamik der Wechselwirkungen bei der Streuung von Elementarteilchen entstehen sowohl Geister- als auch Dipolgeistzustände. Im $\rho = 2$ - Sektor sind die ein- und auslaufenden Zustände durch das Tensorprodukt des Ein-Fermion-Sektors gegeben:

$$\{|p_1 s_1 n\rangle ; |p_1 s_1 g\rangle ; |p_1 s_1 d\rangle\} \otimes \{|p_2 s_2 n\rangle ; |p_2 s_2 g\rangle ; |p_2 s_2 d\rangle\}$$

wobei wegen /4.8,8/ der Raum

$$\{|p_1 s_1 n\rangle ; |p_1 s_1 g\rangle\} \otimes \{|p_2 s_2 n\rangle ; |p_2 s_2 g\rangle\}$$

als physikalischer Raum angesehen werden kann. Durch das Auftreten der Dipolgeistzustände wird die S-Matrix nichtunitär (s.o.). Für die Nukleon-Nukleon-Streuung hat die S-Matrix in Analogie zu /3.4,1/ die Form:

$$S(k_1 s_1 n, k_2 s_2 n | k'_1 s'_1 n, k'_2 s'_2 n) := {}^{-}\langle k_1 s_1 n , k_2 s_2 n | k'_1 s'_1 n , k'_2 s'_2 n\rangle^{+} \qquad (10.1,1)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Streuprozesse der Viererimpulserhaltung genügen, kann diese Bedingung im Schwerpunktssystem folgendermaßen dargestellt werden:

$$K_1 + K_2 = 0 = K'_1 + K'_2 \quad \text{mit } K \text{ dem Dreierimpuls.} \qquad (10.1,2)$$

Aus /10.2,2/ lassen sich folgende Bedingungen ableiten:

$$K_1 = -K_2 \; ; \; K'_1 = -K'_2 \quad \text{und}$$

$$|K_1| = |K_2| \; ; \; |K'_1| = |K'_2| \qquad (10.1,3)$$

Außerdem soll die Viererimpulserhaltung gelten:

$$k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2$$

woraus unter Beachtung von /10.1,3/ folgende Bedingungen resultieren:

$$|K_1| = |K_2| = |K'_1| = |K'_2| \quad \text{und}$$

$$k_1^{\circ} = k_2^{\circ} = k_1'^{\circ} = k_2'^{\circ} \quad \text{wobei} \qquad (10.1,4)$$

$$k^{\circ} = (K^2 + m^2)^{0.5}$$

Die Mandelstramvariable s ist dann gegeben durch

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (k'_1 + k'_2)^2 = 4(K_1^2 + m^2) \qquad (10.1,5)$$

und die t - Variable durch

$$t = (k_1 - k_2)^2 = (k_1' - k_2')^2$$

$$= k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_1'$$

wobei für identische Massen der Teilchen folgt:

$$= +2m^2 - 2(K_1^2 + m^2) + 2K_1 \cos \theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,6)$$

sowie die u - Variable durch

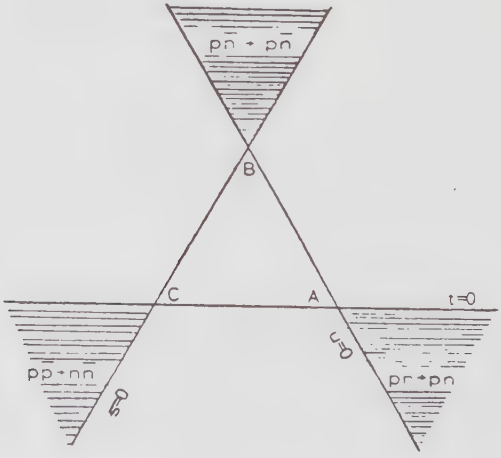
$$u = (k_1 + k_1')^2 = (k_2 + k_2')^2 \qquad (10.1,7)$$

Die drei Variablen s,t und u erfüllen zusätzlich folgende Bedingung:

$$s + t + u = k_1^2 + k_2^2 + k_1'^2 + k_2'^2 = 4m^2 \qquad (10.1,8)$$

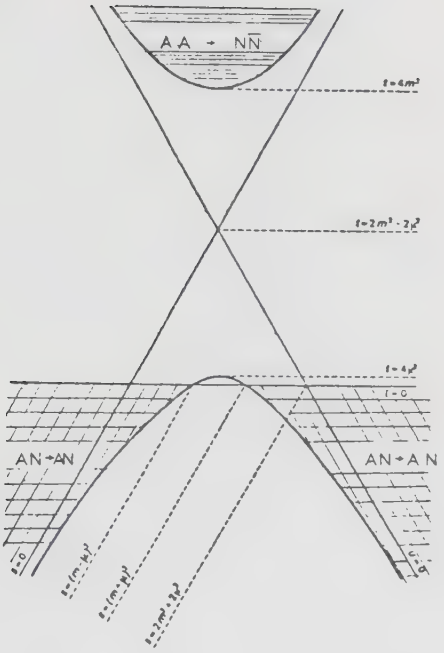
unter der Voraussetzung, daß die Teilchen die gleiche Masse haben. Man sieht, daß nur zwei Variablen voneinander unabhängig sind.

Abbildung 11



Mandelstram-Diagramm für die Proton-Neutron-Streuung unter der Annahme, daß beide Teilchen dieselbe Masse haben. Je nach Bereich bedeutet eine der Mandelstramvariablen das Quadrat der Gesamtenergie, während die anderen zwei Variablen das Quadrat der vierdimensionalen Impulsübergänge darstellen. Die schraffierten Teile in der Abbildung stellen die physikalischen Bereiche, in denen sich die Streuung abspielt, dar.

Abbildung 12



Mandelstram-Diagramm für die Streuung zwischen zwei Teilchen mit verschiedener Masse, z.B. Pion-Nukleon- Streuung. Die schraffierten Teile der Abbildung stellen die physikalischen Bereiche dar.

Zur Unitarisierung dürfen nur Geisterkonfigurationen beigemischt werden /4.8,8/. Man erhält unter Weglassen der Spinorquantenzahlen folgende S-Matrizen, die zur Unitarisierung hinzugefügt werden könnten. Dabei müssen diese Matrizen der Bedingung genügen, daß sie im gesamten physikalischen Bereich, der durch zwei der Mandelstramvariablen der $\bar{<}nn|nn\bar{>}^{+}$ Matrix vorgegeben ist, darstellbar sind. Diese Matrizen sind:

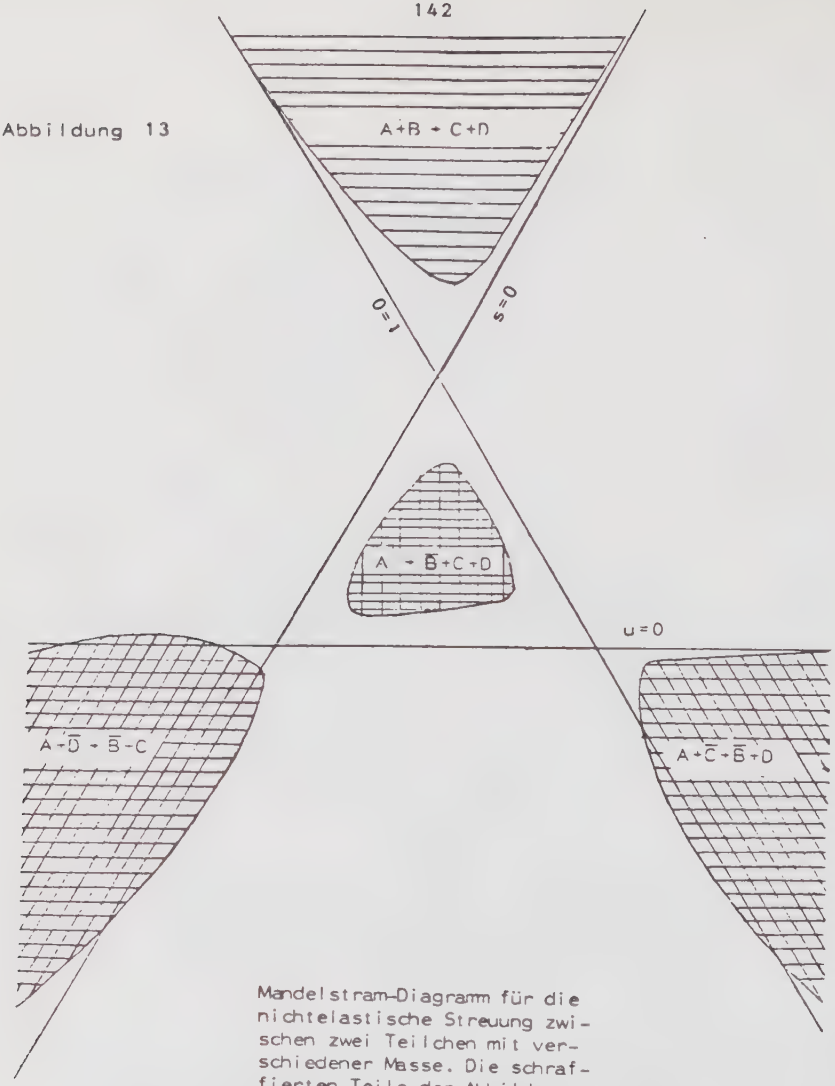
a. $\bar{<}np_1^{\dagger},gq_2^{\dagger}|np_1,np_2\bar{>}^{+}$ e. $\bar{<}gq_1^{\dagger},gq_2^{\dagger}|np_1,gq_2\bar{>}^{+}$

b. $\bar{<}gq_1^{\dagger},gq_2^{\dagger}|np_1,np_2\bar{>}^{+}$ f. $\bar{<}np_1^{\dagger},np_2^{\dagger}|gq_1,gq_2\bar{>}^{+}$

c. $\bar{<}np_1^{\dagger},np_2^{\dagger}|np_1,gq_2\bar{>}^{+}$ g. $\bar{<}np_1^{\dagger},gq_2^{\dagger}|gq_1,gq_2\bar{>}^{+}$

d. $\bar{<}np_1^{\dagger},gq_2^{\dagger}|np_1,gq_2\bar{>}^{+}$ h. $\bar{<}gq_1^{\dagger},gq_2^{\dagger}|gq_1,gq_2\bar{>}^{+}$ (10.1,9)

Abbildung 13



Mandelstram-Diagramm für die nichtelastische Streuung zwischen zwei Teilchen mit verschiedener Masse. Die schraffierten Teile der Abbildung stellen die physikalischen Bereiche dar. Für die Massen der Teilchen gelten folgende Relationen:

$$m_A \geq m_B \geq m_C \geq m_D \geq 0 \qquad (a)$$

$$m_A \geq m_B + m_C + m_D \qquad (b)$$

Gilt die Relation (b), so ist der Teilchen A-Zerfall möglich.

Prozeß /10.1,9 a/

Die Bedingungen sind:

1. $P_1 + P_2 = 0 = P_1' + Q_2'$ bzw. (10.1,10)

$P_1 = -P_2$; $P_1' = -Q_2'$ (Dreierimpulserhaltung) und

2. $p_1 + p_2 = p_1' + q_2'$ (Vierimpulserhaltung) (10.1,11)

Mit diesen zwei Bedingungen erhält man unter Berücksichtigung von $m \neq \mu$ folgende Ungleichungen:

3. $|P_1| = |P_2| \neq |P_1'| = |Q_2'|$ und (10.1,12)

$p_1^\circ = p_2^\circ \neq p_1'^\circ \neq q_2'^\circ$ (10.1,13)

und unter Berücksichtigung von $m = \mu$ folgende Ungleichungen:

3'. $|P_1| = |P_2| = |P_1'| = |Q_2'|$ und (10.1,12')

$p_1^\circ = p_2^\circ = p_1'^\circ = q_2'^\circ$ (10.1,13')

Im folgenden wird der Prozeß a unter den Nebenbedingungen 3' betrachtet.

Die Variable s ist gegeben durch

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + q_2')^2$$

$$= (p_1^\circ + p_2^\circ)^2 = (p_1'^\circ + q_2'^\circ)^2 \quad (10.1,14)$$

und in Übereinstimmung mit /10.1,5/ fordert man:

$$s = (p_1^\circ + p_2^\circ)^2 = 4\,(K_1^2 + m^2) \quad (10.1,15)$$

$$s = (p_1'^\circ + q_2'^\circ)^2 = 4\,(K_1^2 + m^2) \quad (10.1,16)$$

Aus /10.1,15/ erhält man unter Berücksichtigung von /10.1,12/:

$$(\sqrt{P_1^2 + m^2} + \sqrt{P_2^2 + m^2})^2 = 4\,(P_1^2 + m^2) = 4\,(K_1^2 + m^2) \quad (10.1,17)$$

Hieraus erhält man die Bedingung:

$$P_1^2 = P_2^2 = K_1^2 \quad (10.1,18)$$

und aus /10.1,16/, unter Berücksichtigung von /10.1,12/ erhält man folgende Gleichung:

$$(\sqrt{P_1'^2 + m^2} + \sqrt{Q_2'^2 + \mu^2})^2 = (\sqrt{Q_2'^2 + m^2} + \sqrt{Q_2'^2 + \mu^2})^2$$

$$= 4\,(K_1^2 + m^2) \quad (10.1,19)$$

Geht man von /10.1,19/ aus, so erhält man:

$$(\sqrt{Q_2'^2 + m^2} + \sqrt{Q_2'^2 + \mu^2})^2 = 4\,(K_1^2 + m^2)$$

$$= 2\,Q_2'^2 + m^2 + \mu^2 + 2\sqrt{Q_2'^2 + m^2}\,\sqrt{Q_2'^2 + \mu^2}$$

$$= 2\,Q_2'^2 + m^2 + \mu^2 + 2\sqrt{Q_2'^4 + Q_2'^2(m^2+\mu^2) + m^2\mu^2} \qquad (10.1,20)$$

Dividiert man durch zwei und quadriert die Gleichung /10.1,20/, so bekommt man:

$$Q_2'^2(m^2+\mu^2+4(K_1^2+m^2)-(m^2+\mu^2) = (2(K_1^2+m^2)-\tfrac{1}{2}(m^2+\mu^2))^2 - m^2\mu^2 \qquad (10.1,21)$$

Beachtet man dabei, daß

$$(2(K_1^2+m^2)-\tfrac{1}{2}(m^2+\mu^2))^2 = \tfrac{1}{4}(4K_1^2 + 3m^2 - \mu^2)^2 \qquad (10.1,22)$$

so ergibt sich schließlich:

$$Q_2'^2 = \frac{(4K_1^2 + 3m^2 - \mu^2) - 4m^2\mu^2}{16\,(K_1^2 + m^2)} = P_1'^2 \qquad (10.1,23)$$

Die t-Variable ist bei dem Prozeß /10.1,9 a/ gegeben durch :

$$t = (p_1 - p_1')^2$$

$$= + 2m^2 - 2\sqrt{P_1^2 + m^2}\,\sqrt{P_1'^2 + m^2} - 2\,|P_1|\,|P_1'|\cos\theta_{P_1P_1'}$$

$$= + 2m^2 - 2\sqrt{P_1^2 + m^2}\,\sqrt{P_1'^2 + m^2} - 2\,|P_1|\,|Q_2'|\cos\theta_{P_1P_1'} \qquad (10.1,24)$$

und in Übereinstimmung mit /10.1,6/ fordert man einerseits:

$$-(\sqrt{P_1^2 + m^2}\,\sqrt{Q_2'^2 + m^2}) + |P_1|\,|Q_2'|\cos\theta_{P_1P_1'}$$

$$= -(K_1^2 + m^2) + |K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,25)$$

und andererseits:

$$t = (p_2 - q_2')^2$$

$$= m^2 + \mu^2 - 2\sqrt{P_2^2 + m^2}\,\sqrt{Q_2'^2 + \mu^2} + 2\,|P_2|\,|Q_2'|\cos\theta_{P_2Q_2'}$$

$$= 2m^2 - 2(K_1^2 + m^2) + 2\,|K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,26)$$

Löst man /10.1,25/ und /10.1,26/ nach dem Cosinusanteil der Impulse im Streusystem auf, so erhält man:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \frac{\sqrt{P_1^2+m^2}\sqrt{Q_2'^2+m^2} - (K_1^2+m^2) + |K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'}}{|P_1|\ |Q_2'|} \qquad (10.1,27)$$

und

$$\cos\theta_{P_2Q_2'} = \frac{\frac{1}{2}(m^2-\mu^2)+\sqrt{P_2^2+m^2}\sqrt{Q_2'^2+\mu^2} - (K_1^2+m^2)+|K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'}}{|P_2|\ |Q_2'|} \qquad (10.1,28)$$

Setzt man nun in /10.1,27/ und /10.1,28/ /10.1,23/ ein, so ergibt sich schließlich:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \cos\theta_{P_2Q_2'} = \frac{[\frac{1}{4}(m^2-\mu^2)+|K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'}]4\sqrt{K_1^2+m^2}}{|K_1|\ \sqrt{(4K_1^2+3m^2-\mu^2)^2-4m^2\mu^2}} \qquad (10.1,29)$$

Wie man sieht, ist Gleichung /10.1,29/ für genügend kleine Werte von $|K_1|$ nicht erfüllt. Das bedeutet, daß es Bereiche in den s- und t-Variablen gibt, die nicht eindeutig auf den ursprünglichen Prozeß /10.1,2-8/ abbildbar sind. Dieser S-Matrixübergang scheidet also im Fall $m \neq \mu$ aus.

Für den Fall $m=\mu$ erhält man aus /10.1,29/ unter Berücksichtigung von den Bedingungen /10.1,12+13/:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \cos\theta_{P_2Q_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,30)$$

In diesem Falle erhält man eine vollkommene Übereinstimmung zwischen den s- und t-Variablen des ursprünglichen Prozesses /10.1,2-8/ und dem Prozeß a.

Für die folgenden Prozesse b bis h /10.1,9/ werden nur noch die Ausgangsbedingungen und das Endresultat angegeben.

Prozeß /10.1,9 b/

Die Anfangsbedingungen sind:

$P_1+P_2 = 0 = Q_1' + Q_2'$ bzw.

$P_1=-P_2$; $Q_1' = -Q_2'$ und

$p_1+p_2=q_1'+q_2'$. (10.1,31)

Daraus folgt für $m \neq \mu$:

$|P_1| = |P_2| \neq |Q_1'| = |Q_2'|$ und

$p_1^\circ = p_2^\circ \neq q_1'^\circ = q_2'^\circ$ (10.1,32)

Das Endresultat lautet:

$$\cos\theta_{P_1Q_1'} = \cos\theta_{P_2Q_2'} = \frac{\frac{1}{2}(m^2-\mu^2)+|K_1|^2 \cos\theta_{K_1K_1'}}{|K_1|\sqrt{K_1^2+m^2-\mu^2}} \quad (10.1,33)$$

Wiederum erhält man für genügend kleine Werte von $|K_1|$ keine Übereinstimmung zwischen dem ursprünglichen Prozeß und dem Prozeß b.

Für $m = \mu$ erhält man:

$$\cos\theta_{P_1Q_1'} = \cos\theta_{P_2Q_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \quad (10.1,34)$$

In diesem Falle erhält man wieder eine vollkommene Übereinstimmung zwischen dem ursprünglichen Prozeß und dem Prozeß b.

Prozeß /10.1,9 c/

Die Anfangsbedingungen sind:

$P_1 + Q_2 = 0 = P_1' + P_2'$ bzw.

$P_1=-Q_2$; $P_1'=-P_2'$ und

$p_1 + q_2 = p_1' + p_2'$

Daraus folgt für $m \neq \mu$

$|P_1| = |Q_2| \neq |P_1'| = |P_2'|$ und

$p_1^\circ \neq q_2^\circ \neq p_1'^\circ = p_2'^\circ$

Das Endresultat lautet:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2P_2'}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(m^2-\mu^2) + |K_1|^2 \cos_{K_1K_1'}\ 4\sqrt{K_1^2+m^2}}{|K_1|\ \sqrt{(4K_1^2+3m^2-\mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}} \qquad (10.1,35)$$

Wiederum ist für genügend kleine $|K_1|$ die Abbildung in dem ganzen Bereich von s und t in den ursprünglichen Prozeß nicht möglich.
Für $m = \mu$ erhält man:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2P_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,36)$$

In diesem Fall ist die Abbildung im ganzen Bereich möglich.

Prozeß /10.1,9 d/

Die Anfangsbedingungen sind:

$P_1+Q_2=P_1'+Q_2' = 0$

$P_1=-Q_2 \ ; \ P_1'=-Q_2'$

$p_1+q_2=p_1'+q_2'$ und aus diesen Bedingungen folgt für $m\neq\mu$

$|P_1|=|Q_2|=|P_1'|=|Q_2'|$

$p_1^\circ \neq q_2^\circ \neq p_1'^\circ \neq q_2'^\circ$

Das Endresultat lautet:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'}$$

$$= \frac{[\frac{1}{2}(m^2-\mu^2) + |K_1|^2 \cos\theta_{K_1K_1'}]\,16(K_1^2+m^2)+(m^2-\mu^2)^2}{(4K_1^2+3m^2-\mu^2)^2 - 4m^2\mu^2} \qquad (10.1,37)$$

In diesem Falle ist im ganzen Bereich von den s- und t- Variablen eine Abbildung auf den ursprünglichen Prozeß möglich. Diese S-Matrix kann also zur Überlagerung und Unitarisierung benutzt werden.
Im Falle $m=\mu$ erhält man:

$$\cos\theta_{P_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,38)$$

In diesem Falle ist eine Abbildung in dem ganzen Bereich möglich.

Prozeß /10.1,9 e/

Die Anfangsbedingungen sind:

$P_1+Q_2=0=Q_1'+Q_2'$

$p_1+q_2=q_1'+q_2'$ sowie

$|P_1|=|Q_2|\neq|Q_1'|=|Q_2'|$ und

$q_2^\circ \neq p_1^\circ \neq q_1'^\circ = q_2'^\circ$

Das Endresultat für $m\neq\mu$ ist:

$$\cos\theta_{P_1Q_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'}$$

$$= \frac{[\frac{3}{4}(m^2-\mu^2)+|K_1|^2\cos_{K_1K_1'}]\,4\sqrt{(K_1^2+m^2)}}{\sqrt{(4K_1^2+3m^2-\mu^2)^2-4m^2\mu^2}\;\sqrt{(K_1^2+m^2-\mu^2)}} \qquad (10.1,39)$$

Man erkennt, daß für bestimmte Werte von $|K_1|$ sowie m und μ der Term auf der rechten Seite der Gleichung größer wird als 1. Eine Abbildung in dem gesamten Bereich des ursprünglichen Prozesses ist infolgedessen nicht möglich.
Für $m=\mu$ erhält man:

$$\cos\theta_{P_1Q_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,40)$$

In diesem Fall ist eine Abbildung im gesamten Bereich möglich.

Prozeß /10.1,9 f/

Die Anfangsbedingungen sind:

$Q_1+Q_2=0=P_1'+P_2'$

$q_1+q_2=p_1'+p_2'$

$|Q_1|=|Q_2|\neq|P_1'|=|P_2'|$

$q_1^\circ = q_2^\circ \neq p_1'^\circ = p_2'^\circ$

Das Endresultat lautet:

$$\cos\theta_{Q_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2P_2'}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(m^2-\mu^2)+|K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'}}{|K_1|\sqrt{(K_1^2+m^2-\mu^2)}} \qquad (10.1,41)$$

In diesem Falle ist keine Abbildung möglich, die den gesamten Bereich des ursprünglichen Prozesses abdecken könnte.
Im Falle $m=\mu$ erhält man:

$$\cos Q_1P_1' = \cos Q_2P_2' = \cos K_1K_1' \qquad (10.1,42)$$

In diesem Falle ist eine Abbildung, die den gesamten Bereich abdeckt, möglich.

Prozeß /10.1,9 g/

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$Q_1+Q_2=0=P_1'+Q_2'$$

$$q_1+q_2 = p_1'+q_2'$$

$$q_1^\circ = q_2^\circ \neq p_1'^\circ \neq q_2'^\circ$$

und das Endresultat lautet für $m \neq \mu$:

$$\cos\theta_{Q_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}(m^2-\mu^2)+|K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'}\ \ 4\sqrt{(K_1^2-m^2)}}{\sqrt{(4K_1^2+3m^2-\mu^2)^2-4m^2\mu^2}\ \ \sqrt{(K_1^2+m^2-\mu^2)}} \qquad (10.1,43)$$

Für bestimmte Werte von $|K_1|$ und m^2 sowie μ^2 ist eine vollkommene Abbildung in den ursprünglichen Prozeß nicht möglich.
Für $m=\mu$ erhält man:

$$\cos\theta_{Q_1P_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,44)$$

In diesem Falle ist eine vollkommene Abbildung in den ursprünglichen Prozeß möglich.

Prozeß /10.1,9 h/

Die Anfangsbedingungen sind:

$$Q_1+Q_2=0=Q_1'+Q_2'$$

$$q_1+q_2=q_1'+q_2'$$

$$q_1^\circ = q_2^\circ = q_1'^\circ = q_2'^\circ$$

$$|Q_1|=|Q_2|=|Q_1'|=|Q_2'|$$

Das Endresultat für $m \neq \mu$ lautet:

$$\cos\theta_{Q_1Q_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'} = \frac{m^2-\mu^2+|K_1|^2\cos\theta_{K_1K_1'}}{K_1^2+m^2-\mu^2} \qquad (10.1,45)$$

In diesem Falle kann eine vollständige Korrespondenz zu dem ursprünglichen Prozeß gefunden werden. Im Falle $m = \mu$ erhält man:

$$\cos\theta_{Q_1Q_1'} = \cos\theta_{Q_2Q_2'} = \cos\theta_{K_1K_1'} \qquad (10.1,46)$$

Auch hier ist eine vollständige Korrespondenz feststellbar.

Man sieht, daß im Falle $m \neq \mu$ nur die S-Matrizen

$\langle np_1' gq_2' | np_1 gq_2\rangle = S^{ng}_{ng}$ und

$\langle gq_1' gq_2' | gq_1 gq_2\rangle = S^{gg}_{gg}$ der S-Matrix S^{nn}_{nn} beigemischt

werden können, während im Falle $m=\mu$ alle S-Matrizen /10.1,9/ beigemischt werden können.

10.2 Unitaritätsbedingungen durch Zustandsdarstellungen

Die Bedingungen, die an die physikalischen Zustände gestellt werden können, um das Auftreten von freien Geistern zu verbieten, lauten:

$$
\begin{aligned}
&{}^{f}\langle n\ g|n\ n\rangle^{+}_{Ph} = 0\\
&{}^{f}\langle g\ g|n\ n\rangle^{+}_{Ph} = 0\\
&{}^{-}_{Ph}\langle n\ n|n\ g\rangle^{f} = 0\\
&{}^{-}_{Ph}\langle n\ n|g\ g\rangle^{f} = 0
\end{aligned}
\qquad (10.2,1)
$$

Hierbei bedeutet der Superindex f freie Zustände und der Subindex Ph den physikalischen Zustand. Dieser kann wegen /Abschnitt 10.1/ folgendermaßen angesetzt werden:

$$
|n\ n\rangle^{+}_{Ph} = k_1|nn\rangle^{+} + k_2|ng\rangle^{+} + k_3|gg\rangle^{+} \quad \text{sowie} \qquad (10.2,2)
$$

$$
{}^{-}_{Ph}\langle n\ n| = K_1{}^{-}\langle nn| + K_2{}^{-}\langle ng| + K_3{}^{-}\langle gg|
$$

Zusätzlich läßt sich noch fordern:

$$
{}^{-}_{Ph}\langle nn|nn\rangle_{Ph} = {}_{Ph}{}^{+}\langle nn|nn\rangle^{+}_{Ph} = 1| \qquad (10.1,3)
$$

Setzt man /10.2,2/ in /10.2,1/ ein, so ergibt sich:

$$
{}^{f}\langle ng|nn\rangle^{+} = \frac{k_2}{-k_1}\,{}^{f}\langle ng|ng\rangle^{+} - \frac{k_3}{k_1}\,{}^{f}\langle ng|gg\rangle^{+} \quad \text{sowie}
$$

$$
{}^{f}\langle gg|nn\rangle^{+} = \frac{k_2}{-k_1}\,{}^{f}\langle gg|ng\rangle^{+} - \frac{k_3}{k_1}\,{}^{f}\langle gg|gg\rangle^{+} \quad \text{und}
$$

$$
{}^{-}\langle nn|ng\rangle^{f} = \frac{K_2}{-K_1}\,{}^{-}\langle ng|ng\rangle^{f} - \frac{K_3}{K_1}\,{}^{-}\langle gg|ng\rangle^{f} \quad \text{sowie}
$$

$$
{}^{-}\langle nn|gg\rangle^{f} = \frac{K_2}{-K_1}\,{}^{-}\langle ng|gg\rangle^{f} - \frac{K_3}{K_1}\,{}^{-}\langle gg|gg\rangle^{f} \qquad (10.2,4)
$$

Nach der Cramerregel bekommt man für die Konstanten k und K:

$$
k_2 = -k_1\,\frac{\begin{vmatrix} u^{nn}_{ng} & u^{gg}_{ng} \\ u^{nn}_{gg} & u^{gg}_{gg} \end{vmatrix}}{|D|} \quad ; \quad k_3 = -k_1\,\frac{\begin{vmatrix} u^{ng}_{ng} & u^{nn}_{ng} \\ u^{ng}_{gg} & u^{nn}_{gg} \end{vmatrix}}{|D|} \qquad \text{mit}
$$

$$
|D| = \begin{vmatrix} u^{ng}_{ng} & u^{gg}_{ng} \\ u^{ng}_{gg} & u^{gg}_{gg} \end{vmatrix} \qquad (10.2,5)
$$

analog erhält man für die Konstanten K:

$$K_2 = -K_1 \frac{\begin{vmatrix} \ddot{u}^{ng}_{nn} & \ddot{u}^{ng}_{gg} \\ \ddot{u}^{gg}_{nn} & \ddot{u}^{gg}_{gg} \end{vmatrix}}{|d|} \quad ; \quad K_3 = +K_1 \frac{\begin{vmatrix} \ddot{u}^{ng}_{ng} & \ddot{u}^{ng}_{nn} \\ \ddot{u}^{gg}_{ng} & \ddot{u}^{gg}_{nn} \end{vmatrix}}{|d|} \quad \text{mit}$$

$$|d| = \begin{vmatrix} \ddot{u}^{ng}_{ng} & \ddot{u}^{ng}_{gg} \\ \ddot{u}^{gg}_{ng} & \ddot{u}^{gg}_{gg} \end{vmatrix} \qquad (10.2,6)$$

Dabei stellen die U- und Ü-Matrizen Matrizen des folgenden Typs dar:

$$u^{xy}_{zw} = \langle^{f}_{zw}|_{xy}\rangle^{+} \quad ; \quad \ddot{u}^{xy}_{zw} = \langle_{zw}|^{f}_{xy}\rangle$$

Benutzt man /10.1,3/ unter Beachtung der Vollständigkeitsrelation, so erhält man infolge

$$+k_1 * k_2 \langle^{+}_{nn}|_{ng}\rangle^{+} + k_1 * k_3 \langle^{+}_{nn}|_{gg}\rangle^{+} = 0$$

$$+k_2 * k_1 \langle^{+}_{ng}|_{nn}\rangle^{+} + k_3 * k_1 \langle^{+}_{gg}|_{nn}\rangle^{+} = 0$$

$$k_2 * k_2 \langle^{+}_{ng}|_{ng}\rangle^{+} + k_2 * k_3 \langle^{+}_{ng}|_{gg}\rangle^{+} = 0$$

$$k_3 * k_2 \langle^{+}_{gg}|_{ng}\rangle^{+} + k_3 * k_3 \langle^{+}_{gg}|_{gg}\rangle^{+} = 0 \qquad (10.2,7)$$

schließlich:

$$1 = k_1 * k_1 \langle^{+}_{nn}|_{nn}\rangle^{+} \qquad (10.2,8)$$

beziehungsweise $k_1 = 1$ (10.2,9)

Analog ergibt sich $K_1 = 1$ (10.2,10)

10.3 Die physikalische S-Matrix

Die physikalische S-Matrix ist unter Berücksichtigung von /10.2,2/ gegeben durch:

$$\begin{aligned} S^{nn}_{nn_{Ph}} &= K_1k_1\, S^{nn}_{nn} + K_1k_2\, S^{ng}_{nn} + K_1k_3\, S^{gg}_{nn} \\ &+K_2k_1\, S^{nn}_{ng} + K_2k_2\, S^{ng}_{ng} + K_2k_3\, S^{gg}_{ng} \\ &+K_3k_1\, S^{nn}_{gg} + K_3k_2\, S^{ng}_{gg} + K_3k_3\, S^{gg}_{gg} \end{aligned} \qquad (10.3,1)$$

Für $\kappa \neq \mu$ gibt es nach /Abschnitt 10.1/ nur drei S-Matrizen, die überlagert werden können, da diese eine vollkommene Übereinstimmung mit den s- und t- Mandelstamvariablen des ursprünglichen Prozesses gewährleisten. Die physikalische S-Matrix kann dann in diesem Fall unter Berücksichtigung von /10.2,9+10/ folgendermaßen dargestellt werden:

$$S^{nn}_{nn_{Ph}} = S^{nn}_{nn} + \frac{|D_1||d_1|}{|D|\,|d|}\, S^{ng}_{ng} + \frac{|D_2||d_2|}{|D|\,|d|}\, S^{gg}_{gg} \qquad (10.3,2)$$

mit

$$|D_1| = \begin{vmatrix} u^{gg}_{ng} & u^{nn}_{ng} \\ u^{gg}_{gg} & u^{nn}_{gg} \end{vmatrix} \quad ; \quad |D_2| = \begin{vmatrix} u^{ng}_{ng} & u^{nn}_{ng} \\ u^{ng}_{gg} & u^{nn}_{gg} \end{vmatrix} \quad \text{sowie } |D| \text{ gegeben durch /10.2,5/}$$

und

$$|d_1| = \begin{vmatrix} \bar{u}^{ng}_{gg} & u^{ng}_{nn} \\ \bar{u}^{gg}_{ng} & u^{gg}_{nn} \end{vmatrix} \quad ; \quad |d_2| = \begin{vmatrix} \bar{u}^{ng}_{ng} & \bar{u}^{ng}_{nn} \\ \bar{u}^{gg}_{ng} & \bar{u}^{gg}_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{sowie } |d| \text{ gegeben durch /10.2,6/}$$

Im Falle $\kappa = \mu$ hingegen können alle S-Matrizen, die in /10.3,1/ vorkommen, benutzt werden, da sie alle bezüglich des Viererimpulses sowie der s- und t- Variablen entartet sind und daher der eigentlichen physikalischen Streuung 'überlagert' werden können. In diesem Falle erhält man:

$$\begin{aligned} S^{nn}_{nn_{Ph}} &= S^{nn}_{nn} + \frac{|D_1|}{|D|}\, S^{ng}_{nn} + \frac{|D_2|}{|D|}\, S^{gg}_{nn} \\ &+ \frac{|d_1|}{|d|}\, S^{nn}_{ng} + \frac{|d_1||D_1|}{|d|\,|D|}\, S^{ng}_{ng} + \frac{|d_1||D_2|}{|d|\,|D|}\, S^{gg}_{ng} \\ &+ \frac{|d_2|}{|d|}\, S^{nn}_{gg} + \frac{|d_2||D_1|}{|d|\,|D|}\, S^{ng}_{gg} + \frac{|d_2|\,|D_2|}{|d|\,|D|}\, S^{gg}_{gg} \end{aligned} \qquad (10.3,3)$$

10.4 Mandelstamvariablen bei Kollisionen von drei und mehr Teilchen

Im Falle von Kollisionen dreier oder mehr Teilchen vom Typ $A+B+C \to A'+B'+C'_1 \ldots + C'_n$ erhält man $3n-4$ unabhängige Lorentzinvariante Variablen. Für die Dreiteilchenstreuung stellen sich diese Variablen folgendermaßen dar:

Prozeß: $A+B+C \to A'+B'+C'$

Im Gesamtschwerpunktssystem der drei Teilchen gilt:

$$\begin{aligned} s_3 &= (p_A + p_B + p_C)^2 = (p_{A'} + p_{B'} + p_{C'})^2 = p^2 \\ &= s_{AB} + s_{AC} + s_{BC} - m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 \\ &= s_{A'B'} + s_{A'C'} + s_{B'C'} - m_{A'}^2 - m_{B'}^2 - m_{C'}^2 \end{aligned} \qquad (10.4,1)$$

und im Schwerpunktssystem der Zweiteilchensubsysteme gilt:

$$s_{AB} = (p_A + p_B)^2 = (p - p_C)^2 = s_3 + m_C^2 - 2 p_C^\circ \sqrt{s}$$

wobei p_C° die Energie des C - Teilchens im Gesammtschwerpunktssystem darstellt. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} s_{AC} &= (p_A + p_C)^2 \\ s_{BC} &= (p_B + p_C)^2 \\ s_{A'B'} &= (p_{A'} + p_{B'})^2 \\ s_{A'C'} &= (p_{A'} + p_{C'})^2 \\ s_{B'C'} &= (p_{B'} + p_{C'})^2 \end{aligned} \qquad (10.4,2)$$

sowie

$$\begin{aligned} t_{AA'} &= (p_A - p_{A'})^2; \quad t_{BA'} = (p_B - p_{A'})^2; \quad t_{CA'} = (p_C - p_{A'})^2 \\ t_{AB'} &= (p_A - p_{B'})^2; \quad t_{BB'} = (p_B - p_{B'})^2; \quad t_{CB'} = (p_C - p_{B'})^2 \\ t_{AC'} &= (p_A - p_{C'})^2; \quad t_{BC'} = (p_B - p_{C'})^2; \quad t_{CC'} = (p_C - p_{C'})^2 \end{aligned} \qquad (10.4,3)$$

Da es in diesem Falle nur 5 unabhängige Lorentzinvariante Variablen gibt, sind die oben definierten effektiven Massen(s) und die Viererimpulsübertragungen(t) nicht alle unabhängig. Die beste Wahl der Variablen hängt vom betrachteten Prozeß ab.

10.5 Unitarisierung im $\rho = 3$ - Sektor

Wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, gibt es bei der Streuung dreier Teilchen fünf unabhängige Mandelstramvariablen. Da bei der $3 \to 3$ Teilchenstreuung neun verschiedene Zweiteilchenstreusubsysteme existieren:

1. $(12) \to (1'\ 2')$
2. $(12) \to (1'\ 3')$
3. $(12) \to (2'\ 3')$
4. $(13) \to (1'\ 2')$
5. $(13) \to (1'\ 3')$ (10.5,1)
6. $(13) \to (2'\ 3')$
7. $(23) \to (1'\ 2')$
8. $(23) \to (1'\ 3')$
9. $(23) \to (2'\ 3')$

und die fünf unabhängigen Mandelstramvariablen aus den Zweiteilchenstreusystem-Mandelstramvariablen aufgebaut werden können, so müssen unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Abschnitt /10.3/ mindestens fünf Übergänge physikalisch möglich sein /nach 10.2/, damit der Dreiteilchen-Übergang physikalisch ist.
Im folgenden werden die Dreiteilchen-S-Matrizen nach diesem Kriterium untersucht.

$\tilde{<}nng|nnn\tilde{>}^{+}$

In disem Falle sind nur folgende Zweiteilchen-S-Matrizen möglich:
$\tilde{<}nn|nn\tilde{>}^{+}$ und $\tilde{<}ng|nn\tilde{>}^{+}$
Die erste Matrix kommt dreimal vor, während die zweite Matrix 5 mal auftritt. Im Falle $\kappa \neq \mu$ ist nur die S^{nn}_{nn} physikalisch, während im Falle $\kappa = \mu$ auch die S^{nn}_{ng} - Matrix physikalisch ist. Für den oben behandelten Fall bedeutet es, daß nur für den Fall $\kappa = \mu$ die S^{nnn}_{nng} -Matrix physikalisch ist.

$\tilde{<}ngg|nnn\tilde{>}^{+}$

In diesem Falle sind folgende Zweiteilchen-S-Matrizen möglich:
$\tilde{<}ng|nn\tilde{>}^{+}$ und $\tilde{<}gg|nn\tilde{>}$.
Die erste Matrix tritt 6 mal auf und die zweite 3 mal.
Im Falle $\kappa \neq \mu$ ist keiner dieser Übergänge physikalisch.

Für $\kappa = \mu$ hingegen sind beide Matrizen physikalisch.

$\langle ggg|nnn\rangle^{\pm}$

In diesem Falle tritt nur eine Zweiteilchen-S-Matrix auf:

$\langle gg|nn\rangle^{\pm}$

Diese Matrix tritt neunmal auf. Im Falle $\kappa \neq \mu$ ist diese Matrix unphysikalisch. Für $\kappa = \mu$ hingegen physikalisch.

$\langle nng|nng\rangle^{\pm}$

In diesem Falle treten folgende Zweiteilchen-S-Matrizen auf:

$\langle nn|nn\rangle^{\pm}$; $\langle ng|ng\rangle^{\pm}$; $\langle ng|nn\rangle^{\pm}$; $\langle nn|ng\rangle^{\pm}$

Die erste Matrix tritt einmal , die zweite viermal, die dritte zweimal und die vierte ebenfalls zweimal auf. Die erste und die zweite Matrix sind im Fall $\kappa \neq \mu$ physikalisch möglich, die dritte und vierte Matrix hingegen nicht. Beachtet man, daß die erste und zweite Matrix zusammen fünfmal vorkommen, so erkennt man, daß die S-Matrix S^{nng}_{nng} in diesem Fall physikalisch ist. Im Falle $\kappa = \mu$ sind alle Zweiteilchenmatrizen physikalisch.

Analog verhält es sich bei den anderen noch zu behandelnden Matrizen. Im Falle $\kappa \neq \mu$ erkennt man, daß die folgenden Dreiteilchen-S-Matrizen physikalisch sind:

$$S^{nnn}_{nnn} \; ; \; S^{nng}_{nng} \; ; \; S^{ngg}_{ngg} \; ; \; S^{ggg}_{ggg} \quad \text{und alle anderen unphysikalisch.} \tag{10.5,2}$$

Im Falle $\kappa = \mu$ hingegen sind alle S-Matrizen physikalisch. Man erhält dementsprechend folgende Matrizen:

$$\begin{aligned} &S^{nnn}_{nnn} \; ; \; S^{nnn}_{nng} \; ; \; S^{nnn}_{ngg} \; ; \; S^{nnn}_{ggg} \; ; \; S^{nng}_{nnn} \; ; \; S^{nng}_{nng} \; ; \; S^{nng}_{ngg} \; ; \; S^{nng}_{ggg} \; ; \\ &S^{ngg}_{nnn} \; ; \; S^{ngg}_{nng} \; ; \; S^{ngg}_{ngg} \; ; \; S^{ngg}_{ggg} \; ; \; S^{ggg}_{nnn} \; ; \; S^{ggg}_{nng} \; ; \; S^{ggg}_{ngg} \; ; \; S^{ggg}_{ggg} \; . \end{aligned} \tag{10.5,3}$$

10.6 Unitaritätsbedingungen durch Zustandsdarstellungen im $\rho = 3$ - Fall

Analog zum Zweiteilchenfall kann man im Dreiteilchenfall fordern, daß keine freien Geister auftreten dürfen. Dies führt zu folgenden Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
&{}^{f}\langle nng|nnn\rangle^{+}_{Ph} = 0\\
&{}^{f}\langle ngg|nnn\rangle^{+}_{Ph} = 0\\
&{}^{f}\langle ggg|nnn\rangle^{+}_{Ph} = 0\\
&{}^{-}_{Ph}\langle nnn|nng\rangle^{f} = 0\\
&{}^{-}_{Ph}\langle nnn|ngg\rangle^{f} = 0\\
&{}^{-}_{Ph}\langle nnn|ggg\rangle^{f} = 0
\end{aligned}
\qquad (10.6,1)
$$

Außerdem gelten die Normierungsbedingungen:

$$
{}^{-}_{Ph}\langle nnn|nnn\rangle^{-}_{Ph} = {}^{+}_{Ph}\langle nnn|nnn\rangle^{+}_{Ph} = 1 \qquad (10.6,2)
$$

Setzt man für die physikalischen Zustände folgende Entwicklung an:

$$
\begin{aligned}
|nnn\rangle^{+}_{Ph} &= k_1|nnn\rangle^{+} + k_2|nng\rangle^{+} + k_3|ngg\rangle^{+} + k_4|ggg\rangle^{+}\\
{}^{-}_{Ph}\langle nnn| &= K_1\langle nnn| + K_2\langle nng| + K_3\langle ngg| + K_4\langle ggg|
\end{aligned}
\qquad (10.6,3)
$$

so erhält man unter Beachtung der /10.6,1/-Bedingungen für die Entwicklungskonstanten nach der Cramerschen Regel und unter Berücksichtigung der Normierungsbedingungen /10.6,2/:

$$
k_1 = 1 \;;\; k_2 = \frac{D_1}{D} \;;\; k_3 = \frac{D_2}{D} \;;\; k_4 = \frac{D_3}{D}
$$

$$
\text{mit}\quad D = \begin{vmatrix} u^{nng}_{nng} & u^{ngg}_{nng} & u^{ggg}_{nng}\\ u^{nng}_{ngg} & u^{ngg}_{ngg} & u^{ggg}_{ngg}\\ u^{nng}_{ggg} & u^{ngg}_{ggg} & u^{ggg}_{ggg} \end{vmatrix} \;;\; D_1 = -\begin{vmatrix} u^{nnn}_{nng} & u^{ngg}_{nng} & u^{ggg}_{nng}\\ u^{nnn}_{ngg} & u^{ngg}_{ngg} & u^{ggg}_{ngg}\\ u^{nnn}_{ggg} & u^{ngg}_{ggg} & u^{ggg}_{ggg} \end{vmatrix}
\qquad (10.6,4)
$$

$$
D_2 = -\begin{vmatrix} u^{nng}_{nng} & u^{nnn}_{nng} & u^{ggg}_{nng}\\ u^{nng}_{ngg} & u^{nnn}_{ngg} & u^{ggg}_{ngg}\\ u^{nng}_{ggg} & u^{nnn}_{ggg} & u^{ggg}_{ggg} \end{vmatrix} \;;\; D_3 = -\begin{vmatrix} u^{nng}_{nng} & u^{ngg}_{nng} & u^{nnn}_{nng}\\ u^{nng}_{ngg} & u^{ngg}_{ngg} & u^{nnn}_{ngg}\\ u^{nng}_{ggg} & u^{ngg}_{ggg} & u^{nnn}_{ggg} \end{vmatrix}
$$

Analog ergibt sich:

$$
K_1 = 1 \;;\; K_2 = \frac{d_1}{d} \;;\; K_3 = \frac{d_2}{d} \;;\; K_4 = \frac{d_3}{d}
$$

mit

$$d = \begin{vmatrix} \ddot{u}^{nng}_{nng} & \ddot{u}^{nng}_{ngg} & \ddot{u}^{nng}_{ggg} \\ \ddot{u}^{ngg}_{nng} & \ddot{u}^{ngg}_{ngg} & \ddot{u}^{ngg}_{ggg} \\ \ddot{u}^{ggg}_{nng} & \ddot{u}^{ggg}_{ngg} & \ddot{u}^{ggg}_{ggg} \end{vmatrix} ; \quad d_1 = - \begin{vmatrix} \ddot{u}^{nng}_{nnn} & \ddot{u}^{nng}_{ngg} & \ddot{u}^{nng}_{ggg} \\ \ddot{u}^{ngg}_{nnn} & \ddot{u}^{ngg}_{ngg} & \ddot{u}^{ngg}_{ggg} \\ \ddot{u}^{ggg}_{nnn} & \ddot{u}^{ggg}_{ngg} & \ddot{u}^{ggg}_{ggg} \end{vmatrix}$$

$$d_2 = - \begin{vmatrix} \ddot{u}^{nng}_{nng} & \ddot{u}^{nng}_{nnn} & \ddot{u}^{nng}_{ggg} \\ \ddot{u}^{ngg}_{nng} & \ddot{u}^{ngg}_{nnn} & \ddot{u}^{ngg}_{ggg} \\ \ddot{u}^{ggg}_{nng} & \ddot{u}^{ggg}_{nnn} & \ddot{u}^{ggg}_{ggg} \end{vmatrix} ; \quad d_3 = - \begin{vmatrix} \ddot{u}^{nng}_{nng} & \ddot{u}^{nng}_{ngg} & \ddot{u}^{nng}_{nnn} \\ \ddot{u}^{ngg}_{nng} & \ddot{u}^{ngg}_{ngg} & \ddot{u}^{ngg}_{nnn} \\ \ddot{u}^{ggg}_{nng} & \ddot{u}^{ggg}_{ngg} & \ddot{u}^{ggg}_{nnn} \end{vmatrix} \qquad (10.6,5)$$

Die S-Matrix läßt sich für den Fall $\kappa \neq \mu$ unter Berücksichtigung von /10.5,2/ folgendermaßen schreiben:

$$S^{nnn}_{nnn_{Ph}} = S^{nnn}_{nnn} + \frac{D_1 d_1}{D d} S^{nng}_{nng} + \frac{D_2 d_2}{D d} S^{ngg}_{ngg} + \frac{D_3 d_3}{D d} S^{ggg}_{ggg} \qquad (10.6,6)$$

und im Falle $\kappa = \mu$ unter Berücksichtigung von /10.5,3/:

$$\begin{aligned} S^{nnn}_{nnn_{Ph}} = {} & S^{nnn}_{nnn} + \frac{d_1}{d} S^{nnn}_{nng} + \frac{d_2}{d} S^{nnn}_{ngg} + \frac{d_3}{d} S^{nnn}_{ggg} \\ & + \frac{D_1}{D} S^{nng}_{nnn} + \frac{D_1 d_1}{D d} S^{nng}_{nng} + \frac{D_1 d_2}{D d} S^{nng}_{ngg} + \frac{D_1 d_3}{D d} S^{nng}_{ggg} \\ & + \frac{D_2}{D} S^{ngg}_{nnn} + \frac{D_2 d_1}{D d} S^{ngg}_{nng} + \frac{D_2 d_2}{D d} S^{ngg}_{ngg} + \frac{D_2 d_3}{D d} S^{nng}_{ggg} \\ & + \frac{D_3}{D} S^{ggg}_{nnn} + \frac{D_3 d_1}{D d} S^{ggg}_{nng} + \frac{D_3 d_2}{D d} S^{ggg}_{ngg} + \frac{D_3 d_3}{D d} S^{ggg}_{ggg} \end{aligned} \qquad (10.6,7)$$

10.7 Neuer Ansatz für die Unitarisierung

Aus den vorigen Abschnitten dieses Kapitels geht hervor, daß die von Stumpf in /28/ angegebenen Unitarisierungsbedingungen zu einer Karowski-ähnlichen Unitarisierungsprozedur führen, ein Sachverhalt, der bei Aufstellung der Unitarisierungsbedingungen nicht vorausgesehen werden konnte. Insofern schlug mir Professor Stumpf vor, eine gewisse Mittelung vorzunehmen. Der neue Ansatz sollte nun folgendermaßen heißen:

$$
\begin{aligned}
|nn\rangle^{+}_{p} = &\iint d\,k_1\, d\,k_2 \quad C(n_1 n_2 | n(k_1)\, g(\Pi_2))\quad |n(k_1)\, g(\Pi_2)\rangle^{+} \\
&+ \iint d\,\Pi_1\, d\,\Pi_2 \quad C(n_1 n_2 | g(\Pi_1)\, g(\Pi_2))\quad |g(\Pi_1)\, g(\Pi_2)\rangle^{+} \\
&+ |nn\rangle^{+}
\end{aligned}
$$

bzw. (10.7,1)

$$
\begin{aligned}
{}^{-}_{p}\langle nn| = {}^{-}\langle nn| &+ \iint d\,h_1\, d\,\Pi_2 \quad K(n(h_1)\, g(\Pi_2) | nn)\quad {}^{-}\langle n(h_1)\, g(\Pi_2)| \\
&+ \iint d\,\Pi_1\, d\,\Pi_2 \quad K(g(\Pi_1)\, g(\Pi_2) | nn)\quad {}^{-}\langle g(\Pi_1)\, g(\Pi_2)|
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung der Bedingungen /10.2,1/ erhält man singuläre Integralgleichungen, die gelöst werden sollten. Hierbei muß beachtet werden, daß in jeder Näherung die Unitrität der S-Matrix gewährleistet werden muß. Interessant erscheint auch in diesem Zusammenhang eine Untersuchung der Analizitätsstruktur der Kerne der oben genannten Integralgleichungen zu sein. Zum Teil soll diese Problematik in Kapitel 12 nach der Berechnung der zweiten Näherung der zwei-Teilchen - zwei-Teilchen-Streuung im $p = 2$ - Sektor untersucht werden.

11.1 Die Fermioneneigenwertgleichung

Fouriertransformiert man Gleichung /11.2/, so erhält man:

$$\tilde{\Psi}_{\alpha''}(p) = \frac{-8}{(2\pi)^4} \int dq_1 \frac{L^2}{2} \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\eta} \delta(p-q_1) \tilde{G}_{\alpha''\alpha}(p) \tilde{F}_{\gamma\beta}(q_1) \tilde{\Phi}_\eta(p)$$

$$- \frac{6}{(2\pi)^8} \int dq_1\, dq_2\, dq_3 \; \delta(p-q_1-q_2-q_3) \frac{L^3}{4} \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{V}_{\varepsilon\mu\nu\eta} \otimes$$

$$\otimes \tilde{G}_{\alpha''\alpha}(p) \tilde{F}_{\mu\gamma}(q_1) \tilde{F}_{\nu\beta}(q_2) \tilde{G}_{\delta\varepsilon}(q_3) \tilde{\Phi}_\eta(p) \qquad (11.1,1)$$

Die Nukleonwellenfunktion $\tilde{\Phi}_\eta(p)$ liegt aus gruppentheoretischen Gründen fest. Sie soll ein Diracspinor mit Isospin $I = \frac{1}{2}$ und Baryonenzahl $B = 1$ sein /siehe Kapitel 8/. Insofern wird diese Wellenfunktion durch /8.,2/ dargestellt. Schreibt man /8.,2/ um, so erhält man unter Berücksichtigung von /5.4.1,4/:

$$\tilde{\Phi}_\alpha(p) = \lambda^F_\alpha \tilde{\Phi}^F_\alpha(p) \qquad (11.1,2)$$

Berücksichtigt man /4.,21/, so erhält man für /11.1,1/ im Schwerpunktssystem:

$$\tilde{G}^F_{\alpha''\alpha}(J) = \frac{+8}{(2\pi)^4} \frac{L^2}{2} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha''\alpha} V^i_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^\nu_{\gamma\beta} V^i_{\gamma\eta} G^\mu(J) \int d^4p \; \frac{(\not{p}-\not{\kappa})\,(\not{p}-\not{\mu})^2}{(p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$- \frac{6}{(2\pi)^8} \frac{L^4}{4} \bar{\Gamma}^\zeta_{\alpha\alpha} \bar{\Gamma}^\xi_{\delta\varepsilon} \bar{\Gamma}^\theta_{\mu\gamma} \bar{\Gamma}^\omega_{\nu\beta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\varepsilon\mu\nu\eta} G^\zeta(J) \otimes$$

$$\otimes \int d^4p\, d^4q \; \frac{(J-p-q)^\xi (\not{p}-\not{\kappa})^\theta [(\not{p}-\not{\mu})^\theta]^2 (\not{q}-\not{\kappa})^\omega [(\not{q}-\not{\mu})^\omega]^2}{[(J-p-q)^2+i\varepsilon]\,(p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2(q^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

(11.1,3)

Hierbei muß berücksichtigt werden, daß $\sum_i V^i V^i = V$ ist. Außerdem sollte man beachten, daß in dem zweiten Integralausdruck die /4.5,3/ Greenfunktion durch eine Greenfunktion des Typs /4.,20/ approximiert wurde. Man nimmt dabei (im Lorentzschen Sinne) an, daß die nackten Massen null sind und die Masse der einzelnen Teilchen durch die Wechselwirkung verursacht wird.

Da $\tilde{\Psi}$ ein Diracspinor ist, genügt er der Diracgleichung:

$$(\not{J} - \kappa_\zeta)\, \tilde{\Psi}(J) = 0 \qquad (11.1,4)$$

So erhält man für /11.1,3/ nach Anwendung von /11.1,4/:

$$0 = \frac{(J^2)(J-\kappa_0)^2}{\kappa_0^2} \Big\{ \frac{-8}{(2\pi)^4} \frac{L^2}{2} \bar{\Gamma}^{\zeta}_{\alpha''\alpha} V^{i}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta} V^{i}_{\gamma\eta} \int d\Phi \frac{(\not{p}-\kappa)^{\theta} (\not{p}+\mu)^{\theta} (\not{p}+\mu)^{\theta}}{(p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$- \frac{6}{(2\pi)^8} \frac{L^4}{4} \bar{\Gamma}^{\zeta}_{\alpha''\alpha} V^{i}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^{\xi}_{\delta\varepsilon} V^{j}_{\varepsilon\mu} \bar{\Gamma}^{\theta}_{\mu\nu} V^{i}_{\gamma\delta} \Gamma^{\omega}_{\nu\beta} V^{j}_{\nu\eta} \otimes$$

$$\otimes \int d^4p\, d^4q \frac{(J-p-q)^{\xi} (\not{p}+\kappa)^{\theta} [(\not{p}+\mu)^{\theta}]^2 (\not{q}+\kappa)^{\omega} [(\not{q}+\mu)^{\omega}]^2}{[(J-p-q)^2+i\varepsilon](p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2 (q^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q^2-\mu^2+i\varepsilon)^2} \Big\}^{\xi}$$

$$\otimes \Phi^{F}_{\eta}(J) \qquad (11.1,5)$$

Eine triviale Lösung der Gleichung /11.1,5/ ist $J^2 = 0$

Vollführt man die ganze Algebra, so erhält man für den nichttrivialen Anteil von /11.1,5/:

$$0 = \Big\{ -8 \quad \gamma^{\theta} \int d^4p \frac{(p^{\theta}+\kappa)(p^{\theta}p^{\theta} + 2p^{\theta}\mu + \mu^2)}{(p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$- \frac{6}{(2\pi)^8} \frac{L^2}{2} \frac{4}{3} (\gamma^{\xi} g^{\theta\omega} + \gamma^{\omega} g^{\xi\theta} + \gamma^{\theta} g^{\omega\xi})(\kappa^6 + 5\mu^2\kappa^4 + \mu^6) \otimes$$

$$\otimes \int d^4p\, d^4q \frac{(J-p-q)^{\xi} p^{\theta} q^{\omega}}{[(J-p-q)^2+i\varepsilon](p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2 (q^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$- \frac{6}{(2\pi)^8} \frac{L^2}{2} 4 (\kappa^8 + 6\kappa^4\mu^2 + \mu^4\kappa^2) \gamma^{\xi} \otimes$$

$$\otimes \int d^4p\, d^4q \frac{(J-p)^{\xi}}{[(J-p-q)^2+i\varepsilon](p^2-\kappa^2+i\varepsilon)(p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2 (q^2-\kappa^2+i\varepsilon)(q^2-\mu^2+i\varepsilon)^2} \Big\}^{\xi}$$

$$\otimes \Phi^{F}_{\eta}(J) \qquad (11.1,6)$$

Unter Ausnutzung der folgenden Formel

$$\frac{1}{a^{n+1}\, b^{m+1}} = \frac{(n+m+1)!}{n!\, m!} \int_0^1 dx \frac{x^n (1-x)^m}{[ax + b(1-x)]^{n+m+2}} \qquad (11.1,7)$$

erhält man für /11.1,6/:

$$0 = -8\,\mathfrak{L}_A - \frac{6}{(2\pi)^4}\frac{L^2}{2}\frac{4}{3}\left(\gamma^\xi g^{\theta\omega}+\gamma^\omega g^{\xi\theta}+\gamma^\theta g^{\omega\xi}\right)\left(\kappa^4+5\mu^2\kappa^2+\mu^4\right)\mathfrak{L}_B - \frac{6}{(2\pi)^4}\frac{L^2}{2}\,4\,\left(\kappa^4+6\kappa^4\mu^2+\mu^4\kappa^2\right)\gamma^\xi\,\mathfrak{L}_C \qquad (11.1,6')$$

mit

$$\mathfrak{L}_A = \frac{i\pi^2}{2}\left\{(2\mu+\kappa)\frac{1-2\ln 2}{2}+(2\mu+\kappa)\frac{1}{2}\left(1-\frac{\kappa^4}{(\kappa^2-\mu^2)^2}\right)\ln|+\mu^2| + (2\mu+\kappa)\frac{1}{2}\frac{\kappa^4}{(\kappa^2-\mu^2)^2}\ln|\kappa^2| - (2\mu+\kappa)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\kappa^2}{\kappa^2-\mu^2}\right) + \frac{\mu^2\kappa}{2}\left(\frac{1}{\kappa^2-\mu^2}+\frac{\kappa^2}{(\kappa^2-\mu^2)^2}\ln|+\mu^2|\right) - \frac{\mu^2\kappa}{2}\left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2-\mu^2)^2}\ln|+\kappa^2|\right)\right\} \qquad (11.1,8)$$

und

$$\mathfrak{L}_B = g^{\xi\theta}J^\omega\int_0^1\!\!\int\!dx\,dy\,dz\,dw\,\frac{\frac{1}{2}\pi^4(1-y)xz^2(1-z)(w-w^2)}{[\,w(zx\kappa^2-\kappa^2z-\mu^2xz+J^2z(1-z))+(-\kappa^2y+\kappa^2yz-\mu^2(1-y)+\mu^2(1-y}$$

$$+\left(J^\beta g^{\xi\omega}+J^\xi g^{\theta\omega}+J^\omega g^{\xi\theta}\right)\int_0^1\!\!\int\!dx\,dy\,dz\,dw\,\frac{\frac{z}{2}\pi^4(1-y)(1-w)wxz^2(1-z)}{[\,\$_1\,]^2}$$

$$-\left(J^\xi J^\theta J^\omega\right)\int_0^1\!\!\int\!dx\,dy\,dz\,dw\,\frac{2\pi^4(1-y)(1-w)w^2xz\,(1-z)^2}{[\,\$_1\,]^3} \qquad (11.1,9)$$

mit

$$\$_1 = J^2wz(1-z)+\kappa^2(zw(x-1)-(1-z)y)-\mu^2(xwz+(1-y)(1-z))$$

und

$$\varepsilon_C = -J^{\xi}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_0^1 dx\,dy\,dz\,dw\,\frac{\pi^4\,x(1-y)(1-w)w\,z^2(1-z)}{6[\,\$_1\,]^3} \qquad (11.1,10)$$

mit $\$_1$ aus /11.1,9/.

Anstatt der umständlichen Auflösung des Doppelintegrals in /11.1,5/ wie in /11.1,6/ geschildert, ist es günstiger, wenn man nicht an eine numerische Lösung der Gleichung denkt, dieses Integral anders aufzulösen. Dabei greift man auf das in Anhang 8 berechnete Teilintegral zurück. Das Doppelintegral nimmt dann die Form an:

$$\begin{aligned}\int dp\,F(p)\,\Big(& 0_1 + 0_2(q-p)^1 + 0_3(q-p)^2 + 0_4(q-p)^3 + 0_5(q-p)^4 + 0_6(q-p)^{-2} + 0_7(q-p)^{-1} \\ & + \ln(\mu^2-(q-p))\big(0_8(q-p)^5 + 0_9(q-p)^4 + 0_{10}(q-p)^3 + 0_{11}(q-p)^2 \\ & \qquad + 0_{12}(q-p)^1 + 0_{13} + 0_{14}(q-p)^{-1} + 0_{15}(q-p)^{-2}\big) \\ & + \ln(\kappa^2-(q-p))\big(0_{16}(q-p)^5 + 0_{17}(q-p)^4 + 0_{18}(q-p)^3 + 0_{19}(q-p)^2 \\ & \qquad + 0_{20}(q-p)^1 + 0_{21} + 0_{22}(q-p)^{-1} + 0_{23}(q-p)^{-2}\big)\Big)\end{aligned} \qquad (11.1,11)$$

Hiermit wird es sehr einfach, dieses Integral auszurechnen. Die Ausrechnung bleibt allerdings auch in diesem Fall langwierig.
Um erste Werte für μ zu erhalten, beachten wir zunächst nur den imaginären Anteil der Gleichung /11.1,6'/ (den erste Term).
Man erhält die folgenden μ-Werte:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 317 \text{ MeV} \\ \mu_2 &= 729 \text{ MeV} \\ \mu_3 &= 931 \text{ MeV} \\ \mu_4 &= 1113 \text{ MeV} \\ \mu_5 &= 1399 \text{ MeV} \\ \mu_6 &= 1943 \text{ MeV} \end{aligned} \qquad (11.1,12)$$

Mit diesen Werten habe ich mich bei der Ausrechnung nicht zufriedengegeben. Um eine genauere Bestimmung der μ Werte zu erreichen, wurde in einem zweiten Schritt der Realanteil der Gleichung berücksichtigt.

Bei der analytischen Auswertung der vierfachen Integrale in /11.1,9/ und /11.1,10/ treten neben einigen Di- und Trilogarithmen und Clausen's-Integrale keine interessanten Integrale auf. Die Auswertung dieser Integrale umfaßt ca. 500 Seiten und würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen. Die durchgeführte analytische Lösung wird in dieser Arbeit nicht dargestellt. Insofern erfolgte die Lösung der Integrale numerisch. Da jedoch die Integrale noch singulär sind, wurde von mir ein Spezialprogramm entwickelt, welches neben anderem zwei wichtige Vorteile vereint. Erstens wird die maximale Rechnerkapazität ausgeschöpft, und zweitens registriert der Rechner sowohl die Anzahl der Singularitäten wie auch den Wert der Variablen, für die die vorher erwähnten Singularitäten auftreten. Außerdem vermag es positive und negative Singularitäten gegeneinander auszugleichen.

Bei Gleichung /11.1,6'/, welche den Wert 0 hat, sind sowohl der erste Term (imaginärer Teil) als auch der zweite und dritte Term zusammen (reeller Teil) jeweils gleich Null. Man ermittelt die μ^2-Werte, für die der erste Term gleich Null wird, und setzt diese in die zwei anderen Terme der Gleichung /11.1,6'/ ein. Da die in erster Näherung ermittelten μ-Werte für die weiteren Berechnungen noch nicht genau genug sind, erfolgt das Einsetzen und die Berechnung im reellen Teil. Dabei erhält man μ-Werte, die von den eingesetzten etwas abweichen und genaueren Werten entsprechen. Dieses wird dadurch erreicht, daß man in den reellen Teil, der eine Funktion von J^2 und μ^2 ist, die ermittelten Werte, μ^2-Werte aus dem ersten Term und die in der Literatur angegebenen experimentellen J^2-Werte einsetzt und anschließend die korrigierten μ^2-Werte mittels der „Best-fit"-Methode errechnet.

Bei dieser Prozedur werden zwei J^2-Werte genommen: N(1470) und N(1535). Sie wurden mit einer Abweichung von $\pm$ 20 % ins Rechenprogramm eingegeben, in diesem Bereich ständig variiert und die entsprechenden μ^2-Werte jeweils berechnet. Außer den zwei J^2-Werten aus dem Fermionenspektrum wurde das Bosonenspek-

trum berücksichtigt, um L (die Kopplungskonstante) zu bestimmen. Die Bestimmung der Kopplungskonstante ist anhand der Fermionen-eigenwertgleichungen bei dieser ersten Näherung nicht möglich. Erst bei Berücksichtigung der zweiten Näherung der Fermionen-eigenwertgleichung wäre eine Bestimmung sämtlicher Konstanten des Systems durch die Fermioneneigenwertgleichungen möglich. Insofern wurde ein anderer Weg eingeschlagen. Mit den in den Fermioneneigenwertgleichungen bestimmten μ-Werte wird eine ‚best-fit'-Prozedur bei den Bosoneneigenwertgleichungen gemacht. Der aus dieser Prozedur bestimmte Wert von L lautet:

$$L = 219.022899516 \approx 22\,\pi^2 \qquad (11.1,13)$$

Die ‚best-fit'-Werte für μ, unter Berücksichtigung des Realanteils der Fermioneneigenwertgleichung, lauten:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 316.4 \quad \text{MeV} \\ \mu_2 &= 727.8 \quad \text{MeV} \\ \mu_3 &= 931.0 \quad \text{MeV} \\ \mu_4 &= 1112.4 \quad \text{MeV} \\ \mu_5 &= 1400.1 \quad \text{MeV} \\ \mu_6 &= 1943.9 \quad \text{MeV} \end{aligned} \qquad (11.1,14)$$

Hinzu kommt, daß es verträglich erscheint, mit der Berechnung der Fermioneneigenwerte ein weiteres μ zu berücksichtigen. In der ersten Näherung würde allerdings dieses μ den Imaginäranteil nicht zu Null machen. Es ist allerdings nicht vollkommen ausgeschlossen, daß dieses μ in einer höheren Näherung des Imaginäranteiles begründet ist. Dieses μ lautet:

$$\mu_7 = 4.461 \text{ MeV} \qquad (11.1,14')$$

Alle Werte, die sich in dieser Arbeit aus der Berücksichtigung dieses μ_7 ergeben sollten, werden in Zukunft durch das Zeichen £ kenntlich gemacht.

Es zeigt sich, daß die Geistermassen analoge Massen zu den Massen der Quarks aufweisen. Es muß in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen werden, daß in dieser Arbeit die formale Identität zwischen Quarks und Geistern auf gruppentheoretischer Ebene für den Term aus der dynamischen Gleichung, den wir betrachten, nicht hergestellt worden ist. Es besteht insofern nur eine formale Analogie zwischen diesen zwei physikalischen Objekten.

Tabelle 3 Bisher bekannte Quarks

Name	Spin	Isospin I	I_3	Ladung Q	Strangeness	Charm	Beauty	Masse (MeV)
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\approx$ 100
d	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\approx$ 100
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	0	0	$\approx$ 300
c	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\approx$ 1000
b	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	$\approx$ 5000
t	?	?	?	?	0	0	0	>18000

Dementsprechend lohnt es sich, eine Quarkdarstellung für die Geister zu suchen, um eine Identifizierung gewisser Geister mit den Quarks zu ermöglichen (analog zu /4.7,6/).

Aus dem zweiten Term der Gleichung /11.1,3/ kann man das Fermionenspektrum berechnen. Dies ist, wie schon oft erwähnt, besonders langwierig. Unter Zuhilfenahme der Formel /11.1,11/ kann man versuchen, eine grobe Näherung für das Fermionenspektrum zu berechnen, indem man eine Polapproximation am Pol J=p vornimmt. Das Ergebnis dieser Polapproximation an nur einem der Pole ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Tabelle 4 Vergleich zwischen den berechneten und experimentell ermittelten Massen der stabilen Fermionen

Name	exp. Wert	theor. Wert
ν	<0.00006	0
Hja	---------	328
$K^{\pm}$	493	548
$K^{o}_{s,l}$	497	568
Hjb	---------	736
Hjc	---------	796
p,n	938	938
Λ	1115	939
Σ	1190	1008
Δ	1232	1012
Ξ	1320	1184
Ω	1672	1716
D	1870	2760

Es ist bemerkenswert, daß in dieser Näherung keines der folgenden Teilchen auftreten: e, μ, τ .

Zum Vergleich mit den hier berechneten Werten und den noch zu erläuternden im nächsten Abschnitt, reproduziere ich zwei Tabellen aus der berühmten Publikation von T. deGrand, R.L.Jaffe, K.Johnson und J.Kiskis „ Masses and other parameters of the light hadrons" /Physical Review D, 12, 2060-2076, 1975/. Man beachte bitte, mit welch großer Zahl an Parametern eine nur um wenig bessere Anpassung an das Experiment erreicht wird. Man beachte auch bitte, daß all die Parameter, die wir berechnet haben, selbstkonsistent berechnet wurden und keine freien Anpassungsparameter sind.

Tabelle 5

Masses of light hadrons for the case $m_0 = 0$. All masses are quoted in GeV, R_0 in GeV^{-1}. The five contributions to the hadron mass, E_T, E_0, E_Q, E_μ, and E_Δ, defined by Eq. (3.6) and preceding equations, are listed and compared with experiment.

Particle	M_{exp}	M_{bag}	R_0	E_0	E_T	E_Q	E_μ	E_Δ
p	0.938	0.938	5.00	−0.367	0.234	1.226	−0.155	0
Λ	1.116	1.105	4.95	−0.371	0.227	1.400	−0.156	0.005
Σ^+	1.189	1.144	4.95	−0.371	0.227	1.400	−0.116	0.005
Ξ^0	1.321	1.239	4.91	−0.374	0.222	1.572	−0.136	0.003
Δ	1.236	1.233	5.48	−0.336	0.308	1.119	0.141	0
Σ^*	1.385	1.382	5.43	−0.338	0.301	1.292	0.122	0.005
Ξ^*	1.533	1.529	5.39	−0.341	0.293	1.465	0.106	0.005
Ω^-	1.672	1.672	5.35	−0.343	0.287	1.636	0.092	0
ρ	0.77 ± 0.01	0.783	4.71	−0.390	0.196	0.868	0.110	0
K^*	0.892	0.928	4.65	−0.395	0.189	1.039	0.091	0.004
ω	0.783	0.783	4.71	−0.390	0.196	0.868	0.110	0
ϕ	1.019	1.068	4.61	−0.399	0.183	1.207	0.076	0
K	0.495	0.497	3.26	−0.564	0.065	1.407	−0.415	0.003
π	0.139	0.280	3.34	−0.549	0.070	1.222	−0.462	0

$B^{1/4} = 0.145$ GeV, $Z_0 = 1.84$, $\alpha_c = 0.55$, $m_s = 0.279$ GeV

TABLE IV. Masses of the light hadrons for the case $m_0 = 0.108$ GeV. All masses are quoted in GeV, R_0 in GeV^{-1}. The five contributions to the hadron mass, E_T, E_0, E_Q, E_μ, and E_Δ, defined by Eq. (3.6) and preceding equations, are listed and compared with experiment.

Particle	M_{exp}	M_{bag}	R_0	E_0	E_T	E_Q	E_μ	E_Δ
p	0.938	0.939	5.59	−0.348	0.181	1.266	−0.160	0
Λ	1.116	1.103	5.51	−0.354	0.173	1.443	−0.163	0.004
Σ^+	1.189	1.145	5.53	−0.353	0.174	1.439	−0.120	0.004
Ξ^0	1.321	1.286	5.42	−0.360	0.165	1.620	−0.143	0.004
Δ	1.236	1.233	6.38	−0.305	0.269	1.132	0.137	0
Σ^*	1.385	1.381	6.29	−0.310	0.257	1.312	0.119	0.004
Ξ^*	1.533	1.528	6.20	−0.314	0.247	1.489	0.103	0.004
Ω^-	1.672	1.672	6.11	−0.319	0.236	1.666	0.089	0
ρ	0.77 ± 0.01	0.783	5.47	−0.356	0.170	0.860	0.110	0
K^*	0.892	0.925	5.37	−0.363	0.160	1.033	0.091	0.004
ω	0.783	0.783	5.47	−0.356	0.170	0.859	0.110	0
ϕ	1.019	1.063	5.26	−0.370	0.151	1.206	0.076	0
K	0.495	0.371	0.73	−2.688	0	5.565	−2.807	0.001
π	0.139	0.175	1.13	−0.796	0.022	3.717	−1.822	0

$B^{1/4} = 0.125$ GeV, $Z_0 = 1.95$, $\alpha_c = 0.75$, $m_s = 0.353$ GeV

Stable Particle Table

e

Magnetic moment: 1 001 159 652 41 ±.000 000 000 20 $\frac{e\hbar}{2m_e c}$

μ

1.001 165 922 ±.000 000 009 $\frac{e\hbar}{2m_\mu c}$

μ Decay parameters[q]

$\rho = 0.752 \pm 0.003$ $\eta = -0.12 \pm 0.21$
$\xi = 0.972 \pm 0.013$ $\delta = 0.755 \pm 0.009$ $h = 1.00 \pm 0.11$
$|g_A/g_V| = 0.86^{+0.33}_{-0.11}$ $\phi = 180° \pm 15°$

η

Mode	Left-right asymmetry	Sextant asymmetry	Quadrant asymmetry
$\pi^+\pi^-\pi^0$	(0.12±.17)%	(0.19±0.16)%	(−0.17±0.17)%
$\pi^+\pi^-\gamma$	(0.68±.40)%		β=0.047±0.062

$K^\pm$

Mode	Partial rate (sec^{-1})	
$\mu\nu$	(51.33±0.17)×10^6	S=1.2
π^0	(17.10±0.13)×10^6	S=1.1
$\pi\pi^+\pi^-$	(4.52±0.02)×10^6	S=1.1
$\pi\pi^0\pi^0$	(1.40±0.04)×10^6	S=1.3
$\mu\pi^0\nu$	(2.58±0.07)×10^6	S=1.7
$e\pi^0\nu$	(3.90±0.04)×10^6	S=1.1

Slope parameters for $K \to 3\pi$[r]

$K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$ $g = -0.215 \pm .004$ S=1.5°
$K^- \to \pi^-\pi^-\pi^+$ $g = -0.214 \pm .007$ S=2.7°
$K^0 \to \pi^0\pi^0\pi^0$ $g = 0.561 \pm .021$ S=1.7°
$K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ $g = 0.670 \pm .014$ S=1.6°

See Data Card Listings for quadratic coefficients.

K^0_S

$\pi^+\pi^-$ [s] (0.7689±.0033)×10^10
$\pi^0\pi^0$ [s] (0.3517±.0029)×10^10 S=1.1°

K^0_L

$\pi^0\pi^0\pi^0$	(4.14±0.15)×10^6	S=1.3
$\pi^+\pi^-\pi^0$	(2.39±0.04)×10^6	S=1.2
$\pi\mu\nu$	(5.21±0.10)×10^6	S=1.1
$\pi e\nu$	(7.49±0.11)×10^6	S=1.1
$\pi^+\pi^-$ [t,s]	(3.51±0.10)×10^4	
$\pi^0\pi^0$ [s]	(1.81±0.35)×10^4	S=1.5

$\lambda^0_+ = 0.029 \pm .004$

$K^0_{\ell 3}$: $\lambda^0_+ = 0.026 \pm .008$ S=1.5°; $\Delta\lambda = -0.003 \pm .007$ S=1.5°

$K^0_{\ell 3}$: $\lambda^0_+ = 0.0300 \pm .0018$ S=1.2°; $\lambda^0_0 = 0.034 \pm .006$ S=2.5°; $\Delta\lambda = 0.020 \pm .007$ S=2.5°

See Data Card Listings for ξ, f_s, and f_t.

CP violation parameters[t,s,l]

$|\eta_{+-}| = (2.274 \pm .022) \times 10^{-3}$ $|\eta_{000}| = (2.32 \pm .09) \times 10^{-3}$ S=1.1°
$\phi_{+-} = (45.0 \pm 1.2)°$ $\phi_{00} = (48 \pm 13)°$
$|\eta_{+-0}|^2 < 0.12$ $|\eta_{000}|^2 < 0.28$ $\delta = (0.330 \pm .012) \times 10^{-2}$

$\Delta S = -\Delta Q$
Re $x = 0.009 \pm .020$ S=1.4° Im $x = -0.004 \pm .026$ S=1.1°

	Magnetic moment ($e\hbar/2m_p c$)	Decay parameters[u] Measured α	Measured ϕ(degree)	Derived γ	Derived Δ(degree)	g_A/g_V	g_V/g_A
p	2.7928456 ±.0000011						
n	−1.91304211 ± 00000088	$pe^-\nu$				−1.253±0.007	ϕ=(180.20±0.19)°
Λ	−0.606 ±.034	$p\pi^-$ 0.642±0.013 $n\pi^0$ 0.646±0.044 $p e\nu$	(−6.5±3.5)°	0.76	$(7.7^{+4.0}_{-4.1})°$	−0.62±0.05	S=1.2°
Σ^+	2.83 ±.25	$p\pi^0$ −0.978±0.016 $n\pi^+$ +0.072±0.015 $p\gamma$ −1.03$^{+0.52}_{-0.42}$	(36±34)° (167±20)° S=1.1°	0.17 −0.97	(187±6)° $(-72^{+132}_{-11})°$		
Σ^-	−1.48 ±.37	$n\pi^-$ −0.069±0.008 $ne^-\nu$ $\Lambda e^-\nu$	(10±15)°	0.98	$(349^{+12}_{-115})°$	α(0.385±0.070)	S=2.3° 0.24±0.23 S=1.3°
Ξ^0		$\Lambda\pi^0$ −0.44±0.08 S=1.3°	(21±12)°	0.84	$(216^{+13}_{-19})°$		
Ξ^-	−1.85 ±.75	$\Lambda\pi^-$ −0.392±0.021	(2±6)° S=1.1°	0.92	(185±13)°		
Ω^-		ΛK^- −0.66$^{+0.36}_{-0.30}$					

Tabelle 5b,1

TABLES OF PARTICLE PROPERTIES

April 1978

N. Barash-Schmidt, A. Barbaro-Galtieri, C. Bricman, R. L. Crawford,
C. Dionisi, R. J. Hemingway, C. P. Horne, R. L. Kelly,
M. J. Losty, M. Mazzucato, L. Montanet, A. Rittenberg,
M. Roos, T. G. Trippe, G. P. Yost

(Closing date for data: Jan. 1, 1978)

Stable Particle Table

For additional parameters, see Addendum to this table.

Quantities in italics have changed by more than one (old) standard deviation since April 1976.

Particle	$I^G(J^P)C_n^a$	Mass (MeV) $Mass^2$ $(GeV)^2$	Mean Life (sec) $c\tau$ (cm)	Partial decay mode: Mode	Fraction[b]	p or P_{max}[c] (MeV/c)
γ	$0,1(1^-)-$	$0(<6\times10^{-33})$	stable	stable		
ν_e	$-+$	$0(<0.00008)$	stable ($>3\times10^{9}\,m_{\nu_e}$(MeV))	stable		
e	$-+$	0.5110034 ±.0000014	stable ($>5\times10^{21}$ y)	stable		
ν_μ	$-+$	$0(<0.57)$	stable ($>1.3\times10^{6}\,m_{\nu_\mu}$(MeV))	stable		
μ	$-+$	105.65946 ±.00024 $m^2=0.01116392$ $m_{\mu^+}-m_{\mu^-}=-33.9074$ ±.0012	2.197134×10^{-6} ±.000077 $c\tau=6.5868\times10^{4}$	$\mu^-\to$ $e^-\bar{\nu}\nu$	(98.6 ±0.4)%	53
				$e^-\bar{\nu}\nu\gamma$	(1.4 ±0.4)%	53
				$e^-\gamma\gamma$	(<4)$\times10^{-6}$	53
				$e^-e^+e^-$	(<1.9)$\times10^{-9}$	53
				$e^-\gamma$	(<3.6)$\times10^{-9}$	53
				$e^-\nu_e\bar{\nu}_\mu$	(<25)%	53
τ	$-+?$	1807 $m^2=3.27$		$\tau^-\to$ $\mu^-\bar{\nu}\nu$	(17.5 ±1.7)%	900
				$e^-\bar{\nu}\nu$	(17.9 ±2.8)%	903
$\pi^\pm$	$1^-(0^-)$	139.5669 ±.0012 $m^2=0.0194789$ $m_{\pi^+}-m_{\pi^0}=4.6043$ ±.0037	2.6030×10^{-8} ±.0023 $c\tau=780.4$ $(\tau^+-\tau^-)/\bar{\tau}_{av}$ (0.05±0.07)% (test of CPT)	$\pi^+\to$ $\mu^+\nu$	100 %	30
				$e^+\nu$	(1.267±0.023)$\times10^{-4}$	70
				$\mu^+\nu\gamma$	(1.24±0.25)$\times10^{-4}$	30
				$e^+\nu\pi^0$	(1.02±0.07)$\times10^{-8}$	5
				$e^+\nu\gamma$	(2.15±0.50)$\times10^{-8}$	70
				$e^+\nu e^+e^-$	(<5)$\times10^{-9}$	70
π^0	$1^-(0^-)+$	134.9626 ±.0039 $m^2=0.0182149$ $m_{\pi^0}-m_{\pi^+}=4.6043$ ±.0037	0.828×10^{-16} ±.057 S=1.8 $c\tau=2.5\times10^{-8}$	$\gamma\gamma$	(98.85±0.05)%	67
				γe^+e^-	(1.15±0.05)%	67
				$\gamma\gamma\gamma$	(<5)$\times10^{-8}$	67
				$e^+e^-e^+e^-$	(3.32)$\times10^{-5}$	67
				$\gamma\gamma\gamma\gamma$	(<6)$\times10^{-5}$	67
				e^+e^-	(<2)$\times10^{-6}$	67
η	$0^+(0^-)+$	548.8 ±0.6 S=1.4 $m^2=0.3012$	$\Gamma=(0.85\pm0.12)$keV Neutral decays (71.0±0.7)% S=1.1 Charged decays (29.0±0.7)% S=1.1	$\gamma\gamma$	(38.0 ±1.0)%	274
				$\pi^0\gamma\gamma$	3.1 ±1.1)% S=1.2	258
				$3\pi^0$	(29.9 ±1.1)% S=1.1	180
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	(23.6 ±0.6)% S=1.1	175
				$\pi^+\pi^-\gamma$	(4.89±0.13)% S=1.1	236
				$e^+e^-\gamma$	(0.50±0.12)%	274
				$e^+e^-\pi^0$	(<4)$\times10^{-5}$	258
				$\pi^+\pi^-$	(<0.15)%	236
				$e^+e^-\pi^+\pi^-$	(0.1 ±0.1)%	236
				$\pi^+\pi^-\pi^0\gamma$	(<5)$\times10^{-4}$	175
				$\pi^+\pi^-\gamma\gamma$	(<0.2)%	236
				$\mu^+\mu^-$	(2.2 ±0.8)$\times10^{-5}$	253
				$\mu^+\mu^-\pi^0$	(<5)$\times10^{-6}$	211
				e^+e^-	(<3)$\times10^{-6}$	274

Stable Particle Table *(cont'd)*

Particle	$I^G(J^P)C_n$ [a]	Mass (MeV) Mass^2 (GeV)^2	Mean life (sec) $c\tau$ (cm)	Partial decay mode: Mode	Fraction [b]	p or p_{max} [c] (MeV/c)
				$K^+ \to$		
$K^\pm$	$\frac{1}{2}(0^-)$	493.668 ±0.018 m^2=0.24371	1.2371×10^{-8} ±.0026 S=1.9 [e] $c\tau$=370.9 $(\tau^+-\tau^-)/\tau_{av}$ (.11±.09)% (test of CPT) S=1.2 [e]	$\mu^+\nu$	(63.50±0.16)%	236
				$\pi^+\pi^0$	(21.16±0.15)%	205
				$\pi^+\pi^+\pi^-$	(5.58±0.03)% S=1.1 [e]	125
				$\pi^+\pi^0\pi^0$	(1.73±0.05)% S=1.3 [e]	133
				$\mu^+\nu\pi^0$	(3.20±0.09)% S=1.7 [e]	215
				$e^+\nu\pi^0$	(4.82±0.05)% S=1.1 [e]	228
				$\mu^+\nu\gamma$	[d] (5.8 $^{+2.5}_{-2.1}$)$\times10^{-3}$	236
				$e^+\nu\pi^0\pi^0$	[d] (1.8 $^{+0.6}_{-0.4}$)$\times10^{-5}$	207
				$e^+\nu\pi^+\pi^-$	(3.80±0.15)$\times10^{-5}$	203
				$e^+\nu\mu^+\mu^-$	(<5)$\times10^{-7}$	203
				$\mu^+\nu\pi^+\pi^-$	(0.9 ±0.4)$\times10^{-8}$	151
				$\mu^+\nu e^+e^-$	(<3.0)$\times10^{-6}$	151
				$e^+\nu$	(1.54±0.09)$\times10^{-5}$	247
				$\mu^+\nu$	[d] (1.62±0.47)$\times10^{-5}$	247
				$\pi^+\pi^0\gamma$	[d,e] (2.75±0.16)$\times10^{-4}$	205
				$e^+\nu\pi^+\pi^-\gamma$	[d] (1.0 ±0.4)$\times10^{-4}$	125
				$\mu^+\nu\pi^0\gamma$	[d] (<6)$\times10^{-5}$	215
				$e^+\nu\pi^0\gamma$	[d] (3.7 ±1.4)$\times10^{-4}$	228
				$e^+e^-\pi^+$	(2.6 ±0.5)$\times10^{-7}$	227
				$e^+e^+e^-$	(<1)$\times10^{-6}$	227
				$\mu^+\mu^-\pi^+$	(<3.4)$\times10^{-6}$	172
				$\pi^+\gamma\gamma$	[d] (<3.5)$\times10^{-5}$	227
				$\pi^+\gamma\gamma$	[d] (<3.0)$\times10^{-4}$	227
				$\pi^+\nu\nu$	(<0.6)$\times10^{-6}$	227
				$\pi^+\gamma$	(<4)$\times10^{-6}$	227
				$e^+\nu_e\pi^0\nu$	(<7)$\times10^{-5}$	214
				$e^-\nu_e\pi^+$	(<5)$\times10^{-5}$	214
				$\mu^+\nu\nu\nu$	(<6)$\times10^{-6}$	236
				$\mu^+\nu e^+e^-$	(11 ±3)$\times10^{-7}$	236
				$\mu^-\nu e^+e^+$	(<2.0)$\times10^{-8}$	236
				$e^+\nu e^+e^-$	(2 $^{+2}_{-1}$)$\times10^{-7}$	247
K^0 $\bar{K}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	497.67 ±0.13 S=1.1 m^2=0.24768	50% K_{Short}, 50% K_{Long}			
K^0_S	$\frac{1}{2}(0^-)$		0.8923×10^{-10} [d] ±.0022 $c\tau$=2.675	$\pi^+\pi^-$	(68.61±0.24)% S=1.1 [e]	206
				$\pi^0\pi^0$	(31.39)%	209
				$\mu^+\mu^-$	(<3.2)$\times10^{-7}$	225
				e^+e^-	(<3.4)$\times10^{-4}$	249
				$\pi^+\pi^-\gamma$	[d] (1.85±0.10)$\times10^{-3}$	206
				$\gamma\gamma$	(<0.4)$\times10^{-3}$	249
K^0_L	$\frac{1}{2}(0^-)$		5.183×10^{-8} ±.040 $c\tau$=1554	$\pi^0\pi^0\pi^0$	(21.5 ±0.7)% S=1.3 [e]	139
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	(12.39±0.18)% S=1.2 [e]	133
				$\pi^\pm\mu^\mp\nu$	(27.0 ±0.5)% S=1.1 [e]	216
				$\pi^\pm e^\mp\nu$	[g] (38.8 ±0.5)% S=1.1 [e]	229
				$\pi\pi\gamma\gamma$	[f,g] (1.3 ±0.8)%	229
				$\pi^+\pi^-$	[j] (0.203±0.005)%	206
				$\pi^0\pi^0$	(0.094±0.018)% S=1.5 [e]	209
				$\pi^+\pi^-\gamma$	[d] (6.0 ±2.0)$\times10^{-5}$	206
				$\pi^0\gamma\gamma$	(<2.4)$\times10^{-4}$	231
				$\gamma\gamma$	(4.9 ±0.5)$\times10^{-4}$	249
				$\pi\mu$	(<2.0)$\times10^{-9}$	238
				$\mu^+\mu^-$	(9.1 ±1.8)$\times10^{-9}$	225
				$\mu^+\mu^-\gamma$	(<7.8)$\times10^{-6}$	225
				$\mu^+\mu^-\pi^0$	(<5.7)$\times10^{-9}$	177
				e^+e^-	(<2.8)$\times10^{-9}$	249
				$e^+e^-\gamma$	(<2.8)$\times10^{-5}$	249
				$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	(<8.8)$\times10^{-8}$	206
				$\pi^0\pi^0\pi^0\gamma$	(<2.2)$\times10^{-3}$	207
				$D^+ \to$		
$D^\pm$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1868.3 [f] ±0.9 m^2=3.491	$m_{D^+}-m_{D^0}$=5.0 ±0.8	$K^-\pi^+\pi^+$	(3.8 ±1.0)%	845
				$K^0_S\pi^+$	(1.5 ±0.6)%	862
				e^+anything [m]	(9.8 ±1.4)%	934
				$\pi^+\pi^+\pi^-$	(<0.31)%	908
				$\pi^+K^-K^+$	(<0.6)%	743
				$K^+\pi^+\pi^-$	(<0.20)%	845
				$D^0 \to$		
D^0 $\bar{D}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1863.3 [f] ±0.9 m^2=3.472	$\frac{\Gamma(D^0\to\bar{D}^0\to K^+\pi^-)}{\Gamma(D^0\to K\pi)}$ <0.16	$K^-\pi^+$	(1.8 ±0.5)%	860
				$K^-\pi^+\pi^0$	(12 ±6)%	843
				$K^-\pi^+\pi^+\pi^-$	(3.5 ±0.9)%	812
				$K^0_S\pi^0$	(<6)%	860
				$K^0_S\pi^+\pi^-$	(4.4 ±1.1)%	841
				e^+anything [m]	(9.8 ±1.4)%	932
				$\pi^+\pi^-$	(<0.13)%	921
				K^+K^-	(<0.13)%	790

→

Tabelle 5b,3

Stable Particle Table *(cont'd)*

Particle	$I^G(J^P)C_n^a$	Mass (MeV) Mass^2 (GeV)^2	Mean life (sec) $c\tau$ (cm)	Partial decay mode: Mode	Fraction[b]	p or p_{max}[c] (MeV/c)
p	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	938.2796 ±0.0027 m^2=0.880369	stable (>2×10^{30}y)			
n	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	939.5731 ±0.0027 m^2=0.882798 m_p-m_n=−1.29343 ±0.00004	918±14 $c\tau=2.75\times10^{13}$	$pe^-\nu$	100 %	1
Λ	$0(\frac{1}{2}^+)$	1115.60 ±0.05 S=1.2[e] m^2=1.2446 $m_\Lambda-m_{\Sigma^0}$=−76.87 ±0.08	2.632×10^{-10} ±.020 S=1.6[e] $c\tau=7.89$	$p\pi^-$ $n\pi^0$ $pe^-\nu$ $p\mu^-\nu$ $p\pi^-\gamma$	(64.2)% (35.8 ± 0.5)% (8.07±0.28)×10^{-4} (1.57±0.35)×10^{-4} [d](0.85±0.14)×10^{-3}	100 104 163 131 100
Σ^+	$1(\frac{1}{2}^+)$	1189.37 ±0.06 S=1.8[e] m^2=1.4146 $m_{\Sigma^+}-m_{\Sigma^-}$=−7.98 ±.08 S=1.2[e]	0.802×10^{-10} ±.005 $c\tau$=2.40 $\frac{\Gamma(\Sigma^+\to p\gamma(\pi^0\text{ or }n\pi))}{\Gamma(\Sigma^-\to l^-n\nu)}$<.04	$p\pi^0$ $n\pi^+$ $p\gamma$ $n\pi^+\gamma$ $Ae^+\nu$ $p\mu^+\nu$ $n e^+\nu$ $p e^+e^-$	(51.6 ±0.7)% (48.4)% (1.24±0.18)×10^{-3} S=1.4[e] [d](0.93±0.10)×10^{-3} (2.02±0.47)×10^{-5} (<3.0)×10^{-5} (<0.5)×10^{-5} (<7)×10^{-6}	189 185 225 185 71 202 224 225
Σ^0	$1(\frac{1}{2}^+)$	1192.47 ±0.08 m^2=1.4220	5.8×10^{-20} ±1.3 $c\tau=1.7\times10^{-9}$	$\Lambda\gamma$ Ae^+e^- $\Lambda\gamma\gamma$	100 % [d](5.45)×10^{-3} (<3)%	74 74 74
Σ^-	$1(\frac{1}{2}^+)$	1197.35 ±0.06 m^2=1.4336 $m_{\Sigma^0}-m_{\Sigma^-}$=−4.88 ±.06	1.483×10^{-10} ±.015 S=1.4[e] $c\tau$=4.45	$n\pi^-$ $ne^-\nu$ $n\mu^-\nu$ $Ae^-\nu$ $n\pi^-\gamma$	100 % (1.08±0.04)×10^{-3} (0.45±0.04)×10^{-3} (0.60±0.06)×10^{-4} [d](4.6 ±0.6)×10^{-4}	193 230 210 79 193
Ξ^0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)^a$	1314.9 ±0.6 m^2=1.7290 $m_{\Xi^0}-m_{\Xi^-}$=−6.4 ±.6	2.90×10^{-10} ±.10 $c\tau$=8.69	$\Lambda\pi^0$ $\Lambda\gamma$ $\Sigma^0\gamma$ $p\pi^-$ $p\pi^-\nu$ $\Sigma^+e^-\nu$ $\Sigma^-e^+\nu$ $\Sigma^+\mu^-\nu$ $\Sigma^-\mu^+\nu$ $pe^-\nu$	100 % (0.5 ±0.5)% (<7)% (<3.6)×10^{-5} (<1.3)×10^{-3} (<1.1)×10^{-3} (<0.9)×10^{-3} (<1.1)×10^{-3} (<0.9)×10^{-3} (<1.3)×10^{-3}	135 184 117 299 323 120 112 64 49 309
Ξ^-	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)^a$	1321.32 ±0.13 m^2=1.7459	1.654×10^{-10} ±.021 $c\tau$=4.96	$\Lambda\pi^-$ $\Lambda e^-\nu$ $\Sigma^0e^-\nu$ $\Lambda\mu^-\nu$ $\Sigma^0\mu^-\nu$ $n\pi^-$ $ne^-\nu$ $n\mu^-\nu$ $\Sigma^-\gamma$ $p\pi^-\pi^-$ $p\pi^-e^-\nu$ $p\pi^-\mu^-\nu$ $\Sigma^0e^-\nu$	100 % [d](0.69±0.18)×10^{-3} (<0.5)×10^{-3} (3.5 ±3.5)×10^{-4} (<0.8)×10^{-3} (<1.1)×10^{-3} (<3.2)×10^{-3} (<1.5)% (<1.2)×10^{-3} (<4)×10^{-4} (<4)×10^{-4} (<4)×10^{-4} (<2.3)×10^{-4}	139 190 123 163 70 303 327 313 118 223 304 250 6
Ω^-	$0(\frac{3}{2}^+)^a$	1672.2 ±.4 m^2=2.7963	$1.1^{+0.5}_{-0.3}\times10^{-10}$[f] S=2.5[e] $c\tau$=3	$\Sigma^0\pi^-$ $\Xi^-\pi^0$ ΛK^-	100%	293 290 211

Baryon Table

April 1978

The following short list gives the status of all the Baryon States in the Data Card Listings. In addition to the status, the name, the nominal mass, and the quantum numbers (where known) are shown. States with three- or four-star status are included in the main Baryon Table; the others have been omitted because the evidence for the existence of the effect and/or for its interpretation as a resonance is open to considerable question.

N(939)	P11	****	Δ(1232)	P33	****	Λ(1115)	P01	****	Σ(1193)	P11	****	Ξ(1317)	P11	****
N(1470)	P11	****	Δ(1550)	P31	*	Λ(1330)		Dmsd	Σ(1385)	P13	****	Ξ(1530)	P13	****
N(1520)	D13	****	Δ(1650)	S31	****	Λ(1405)	S01	****	Σ(1480)		*	Ξ(1630)		**
N(1535)	S11	****	Δ(1670)	D33	***	Λ(1520)	D03	****	Σ(1580)	D13	**	Ξ(1820)	13	***
N(1540)	P13	*	Δ(1690)	P33	***	Λ(1600)	P01	**	Σ(1620)	S11	**	Ξ(1940)		**
N(1670)	D15	****	Δ(1890)	F35	****	Λ(1670)	S01	****	Σ(1660)	P11	***	Ξ(2030)	1	***
N(1688)	F15	****	Δ(1900)	S31	*	Λ(1690)	D03	****	Σ(1670)	D13	****	Ξ(2120)		*
N(1700)	S11	****	Δ(1910)	P31	****	Λ(1800)	P01	**	Σ(1670)		**	Ξ(2250)		*
N(1700)	D13	***	Δ(1950)	F37	****	Λ(1800)	G09	*	Σ(1690)		**	Ξ(2500)		**
N(1780)	P11	***	Δ(1960)	D35	***	Λ(1815)	F05	****	Σ(1750)	S11	***			
N(1810)	P13	***	Δ(2160)		***	Λ(1830)	D05	****	Σ(1765)	D15	****	Ω(1672)	P03	****
N(1990)	F17	**	Δ(2420)	H3 11	****	Λ(1860)	P03	***	Σ(1770)	P11	*			
N(2000)	F15	**	Δ(2850)		***	Λ(1870)	S01	***	Σ(1840)	P13	*	Λ_c(2260)		*
N(2040)	D13	**	Δ(3230)		***	Λ(2010)		**	Σ(1880)	P11	**			
N(2100)	S11	*				Λ(2020)	F07	*	Σ(1915)	F15	****	Σ_c(2430)		*
N(2100)	D15	**				Λ(2100)	G07	****	Σ(1940)	D13	***			
N(2190)	G17	***	N0(1780)	P01	*	Λ(2110)	F05	***	Σ(2000)	S11	*	Dibaryons		
N(2200)	G19	***	N0(1865)	D03	*	Λ(2325)	D03	*	Σ(2030)	F17	****	S = 0		*
N(2220)	H19	***	N1(1900)	P13	*	Λ(2350)		****	Σ(2070)	F15	*	S = -1		*
N(2650)	I1 11	***	N1(2150)		*	Λ(2585)		***	Σ(2080)	P13	**	S = -2		*
N(3030)		***	N1(2500)		*				Σ(2100)	G17	*			
N(3245)		*							Σ(2250)		****			
N(3690)		*							Σ(2455)		***			
N(3755)		*							Σ(2620)		***			
									Σ(3000)		**			

**** Good, clear, and unmistakable.
*** Good, but in need of clarification or not absolutely certain.
** Needs confirmation.
* Weak.

[See notes on N's and Δ's, Ξ^0's, Λ's and Σ's, Ξ^0's, and dibaryons at the beginning of those sections in the Baryon Data Card Listings; also see notes on individual resonances in the Baryon Data Card Listings.]

Particle[a]	I (J^P)[a] — estab.	π or K beam[b] p_{beam} (GeV/c), $\sigma = 4\pi\chi^2$ (mb)	Mass M[c] (MeV)	Full Width Γ[c] (MeV)	M^2 $\pm\Gamma M$[b] (GeV^2)	Partial decay mode[f] Mode	Fraction[c] %	p or p_{max}[d] (MeV/c)
p	1/2(1/2⁺)		938.3		0.880	See Stable Particle Table		
n			939.6 [g]		0.883			
N(1470)[g]	1/2(1/2⁺)P'_{11}	p = 0.66 σ = 27.8	1390 to 1470	180 to 240 (200)	2.16 ±0.29	Nπ	~60	420
						Nη	~18	*d*
						Nππ	~25	368
						[Nκ	~ 7][e]	*d*
						[Δπ	~23][e]	177
						[Nρ	~ 7][e]	*d*
N(1520)[g]	1/2(3/2⁻)D'_{13}	p = 0.74 σ = 23.5	1510 to 1530	110 to 150 (125)	2.31 ±0.19	Nπ	~55	456
						Nππ	~45	410
						[Nκ	< 5][e]	*d*
						[Nρ	~19][e]	*d*
						[Δπ	~23][e]	228
						Nη	< 1	*d*
N(1535)[g]	1/2(1/2⁻)S'_{11}	p = 0.76 σ = 22.5	1500 to 1545	90 to 150 (100)	2.36 ±0.15	Nπ	~30	467
						Nη	~65	182
						Nππ	~ 5	422
						[Nρ	~ 3][e]	*d*
						[Nκ	~ 2][e]	*d*
						[Δπ	~ 1][e]	243

Baryon Table *(cont'd)*

Particle[a]	I (J^P)[a] — estab.	π or K beam[b] p_{beam} (GeV/c) $\sigma = 4\pi\lambda^2$ (mb)	Mass M[c] (MeV)	Full Width Γ[c] (MeV)	M^2 ±ΓM[b] (GeV^2)	Partial decay mode[f]: Mode	Fraction[e] %	p or p_{max}[d] (MeV/c)
N(1670)[g]	$1/2(5/2^-)D'_{15}$	p = 1.00 σ = 15.6	1650 to 1685	145 to 170 (155)	2.79 ±0.26	$N\pi$	~45	560
						$N\pi\pi$	~55	525
						$[\Delta\pi$	~47][e]	360
						$[N\rho$	~ 5][e]	d
						ΛK	< 0.3	200
						$N\eta$	< 0.5	368
N(1688)[g]	$1/2(5/2^+)F'_{15}$	p = 1.03 σ = 14.9	1670 to 1690	120 to 145 (140)	2.85 ±0.24	$N\pi$	~60	572
						$N\pi\pi$	~40	538
						$[N\epsilon$	~15][e]	340
						$[N\rho$	~13][e]	d
						$[\Delta\pi$	~12][e]	375
						$N\eta$	< 0.3	388
N(1700)[g]	$1/2(1/2^-)S^*_{11}$	p = 1.05 σ = 14.3	1660 to 1700	100 to 200 (150)	2.89 ±0.26	$N\pi$	~55	580
						$N\pi\pi$	~30	547
						$[N\epsilon$	<10][e]	355
						$[N\rho$	7-21][e]	d
						$[\Delta\pi$	4-15][e]	385
						ΛK	~10	250
						ΣK	2-7	109
N(1700)[g]	$1/2(3/2^-)D^*_{13}$	p = 1.05 σ = 14.3	1660 to 1710	80 to 120[h] (120)	2.89 ±0.20	$N\pi$	~10	580
						$N\pi\pi$	~90	547
						$[N\epsilon$	<40][e]	355
						$[N\rho$	< 5][e]	d
						$[\Delta\pi$	15-40][e]	385
						ΛK	~ 1	250
N(1780)	$1/2(1/2^+)P^*_{11}$	p = 1.20 σ = 12.2	1650 to 1750	100 to 180 (160)	3.17 ±0.28	$N\pi$	~20	633
						$N\pi\pi$	>50	603
						$[N\epsilon$	15-40][e]	440
						$[N\rho$	40-65][e]	249
						$[\Delta\pi$	10-20][e]	448
						ΛK	< 5	353
						ΣK	~10	267
						$N\eta$	2-20[i]	476
N(1810)	$1/2(3/2^+)P^*_{13}$	p = 1.26 σ = 11.5	1650 to 1750	100 to 300 (200)	3.28 ±0.36	$N\pi$	~20	652
						$N\pi\pi$	~70	624
						$[N\epsilon$	~20][e]	468
						$[N\rho$	45-70][e]	297
						$[N\omega$	~20][e]	471
						ΛK	1-4	386
						ΣK	~ 2	307
						$N\eta$	< 5	503
N(2190)	$1/2(7/2^-)G_{17}$	p = 2.07 σ = 6.21	2140 to 2250	150 to 300 (250)	4.80 ±0.55	$N\pi$	15-35	888
N(2200)	$1/2(9/2^-)G_{19}$	p = 2.10 σ = 6.12	2130 to 2270	200 to 300 (250)	4.84 ±0.55	$N\pi$	~10	894
N(2220)[g]	$1/2(9/2^+)H_{19}$	p = 2.14 σ = 5.97	2200 to 2250	250 to 350 (300)	4.93 ±0.67	$N\pi$	~20	905
N(2650)	$1/2(11/2^-)I_{1\,11}$[j]	p = 3.26 σ = 3.67	2580 to 2700	~400 (400)	7.02 ±1.06	$N\pi$	~5	1154
N(3030)	1/2(?)	p = 4.41 σ = 2.62	~3030	~400 (400)	9.18 ±1.21	$N\pi$	(J + 1/2)x <0.1[k]	1366

Tabelle 5c,3

Baryon Table *(cont'd)*

Particle[a]	I (J^P)[a] status	π or K beam[b] p_{beam} (GeV/c) $\sigma = 4\pi\lambda^2$ (mb)	Mass M[c] (MeV)	Full Width Γ[c] (MeV)	M^2 $\pm\Gamma M$[b] (GeV^2)	Partial decay mode[f] Mode	Fraction[a] %	p or d p_{max} (MeV/c)
Δ(1232)[g]	3/2(3/2⁺)P'33	p = 0.30 σ = 94.3	1230 to 1234	110 to 120 (115)	1.52 ±0.14	πN $\pi^+\gamma^-$	~99.4 ~ 0	227 80
	Δ(++) Pole position:[I] M − iΓ/2 = (1211.0 ± 0.8) − i(49.9 ± 0.6) Δ(0) Pole position:[I] M − iΓ/2 = (1210.9 ± 1.0) − i(53.1 ± 1.0)							
Δ(1650)[g]	3/2(1/2⁻)S'31	p = 0.96 σ = 16.4	1600 to 1695	120 to 200 (140)	2.72 ±0.23	πN πππN [Nρ [Δπ	~32 ~65 10-25][e] ~50][e]	347 511 *d* 344
Δ(1670)[g]	3/2(3/2⁻)D33	p = 1.00 σ = 15.6	1620 to 1720	190 to 240 (200)	2.79 ±0.33	πN ππN [Nρ [Δπ	~15 ~85 ~40][e] 45-60][e]	560 525 *d* 361
Δ(1690)[g]	3/2(3/2⁺)P"33	p = 1.03 σ = 14.9	1650 to 1900[m]	150 to 350 (250)	2.86 ±0.42	πN ππN [Nρ [Δπ	10-20 ~80 10-20][e] >45][e]	573 540 *d* 377
Δ(1890)[g]	3/2(5/2⁺)F35	p = 1.42 σ = 9.86	1860 to 1910	150 to 300 (250)	3.57 ±0.47	πN ππN [Nρ [Δπ ΣK	~15 ~80 ~60][e] 10-30][e] < 3	704 677 403 531 400
Δ(1910)[g]	3/2(1/2⁺)P"31	p = 1.46 σ = 9.54	1780 to 1960	200 to 280 (220)	3.65 ±0.42	πN ππN [Nρ [Δπ ΣK	15-25 >40 ~40][e] small][e] 2-20	716 691 429 545 420
Δ(1950)[g]	3/2(7/2⁺)F37	p = 1.54 σ = 8.90	1910 to 1950	200 to 280 (240)	3.80 ±0.47	πN ππN [Nρ [Δπ ΣK	~40 >25 ~10][e] ~20][e] < 1	741 716 471 574 460
Δ(1960)[g]	3/2(5/2⁻)D35	p = 1.56 σ = 8.75	1890 to 1950	100 to 300 (200)	3.84 ±0.39	πN ΣK	7-15 <10	748 469
Δ(2160)[n]	3/2(?⁻)	p = 2.00 σ = 6.46	2150 to 2240	160 to 440 (300)	4.67 ±0.65	πN	(J + 1/2)χ ≈0.4 − 1.4[k]	870
Δ(2420)[g]	3/2(11/2⁺)H3 11	p = 2.64 σ = 4.68	2380 to 2450	300 to ~ 500 (300)	5.86 ±0.73	πN	10-15	1023
Δ(2850)	3/2(?⁺)	p = 3.85 σ = 3.05	2800 to 2900	~400 (400)	8.12 ±1.14	πN	(J + 1/2)χ ~0.25[k]	1266
Δ(3230)	3/2(?)	p = 5.08 σ = 2.25	3200 to 3350	~440 (440)	10.43 ±1.42	πN	(J + 1/2)χ ~0.05[k]	1475

[o] Evidence for states with strangeness +1 is inconclusive.
See the Baryon Data Card Listings for data and discussion.

Tabelle 5c,4

Baryon Table *(cont'd)*

Particle[a]	I (J^P)[a] — estab.	π or K beam[b] p_{beam} (GeV/c) $\sigma = 4\pi\lambda^2$ (mb)	Mass M[a] (MeV)	Full Width Γ[a] (MeV)	N^2 $\pm\Gamma_N$[b] (GeV^2)	Partial decay mode[f] Mode	Fraction[c] %	p or p_{max}[d] (MeV/c)
Λ	0(1/2⁺)		1115.6		1.245	See Stable Particle Table		
Λ(1405)	0(1/2⁻)S'01	Below K⁻p threshold	1405 ±5[a]	40 ± 10[a] (40)	1.97 ±0.06	Σπ	100	142
Λ(1520)	0(3/2⁻)D'03	p = 0.389 σ = 84.5	1520 ±2[a]	16 ± 2[a] (16)	2.31 ±0.02	N̄K Σπ Λππ Σππ	46 ± 1 42 ± 1 10 ± 1 0.9 ± 0.1	234 258 250 140
Λ(1670)	0(1/2⁻)S''01	p = 0.74 σ = 28.5	1660 to 1680	20 to 60 (40)	2.79 ±0.07	N̄K Λη Σπ	15–25 15–35 20–60	410 64 393
Λ(1690)	0(3/2⁻)D''03	p = 0.78 σ = 26.1	1690 ±10[a]	40 to 80 (60)	2.86 ±0.10	N̄K Σπ Λππ Σππ	20–30 20–40 ~25 ~20	429 409 415 352
Λ(1815)	0(5/2⁺)F'05	p = 1.05 σ = 16.7	1870 ±5[a]	70 to 90 (80)	3.29 ±0.15	N̄K Σπ Σ(1385)π	55–65 5–15 5–10	542 508 362
Λ(1830)	0(5/2⁻)D05	p = 1.09 σ = 15.8	1810 to 1830	60 to 110 (95)	3.35 ±0.17	N̄K Σπ Σ(1385)π	<10 35–75 >15	554 519 375
Λ(1860)	0(3/2⁺)P'03	p = 1.14 σ = 14.7	1850 to 1920	60 to 200 (100)	3.46 ±0.19	N̄K Σπ	15–40 3–10	576 534
Λ(1870)	0(1/2⁻)S'''01	p = 1.16 σ = 14.2	1700 to 1850	200 to 400 (300)	3.50 ±0.56	N̄K Σπ	20–60 seen	582 542
Λ(2100)	0(7/2⁻)G07	p = 1.68 σ = 8.68	2080 to 2120	100 to 300 (250)	4.41 ±0.53	N̄K Σπ Λη Σκ Λω	~30 ~5 <3 <3 <8	748 699 617 483 443
Λ(2110)	0(5/2⁺)F''05	p = 1.70 σ = 8.48	2050 to 2150	150 to 300 (200)	4.45 ±0.42	N̄K Σπ	5–25 <40	756 709
Λ(2350)	0(9/2⁺)	p = 2.29 σ = 5.85	2340 to 2420	100 to 250 (120)	5.52 ±0.28	N̄K Σπ	~12 ~10	913 865
Λ(2585)	0(?)	p = 2.91 σ = 4.37	~2585	~300 (300)	6.68 ±0.78	N̄K	(J+1/2)χ ~1.0[k]	1058
Σ	1(1/2⁺)		(+)1189.4 (0)1192.5 (−)1197.4		1.415 1.422 1.434	See Stable Particle Table		
Σ(1385)	1(3/2⁺)P'13	Below K⁻p threshold	(+)1382.3±0.4 s = 1.6[p] (−)1387.5±0.6 s = 1.0[p] (0)1382.0±2.5 s = 1.6[p]	(+)35±2 s = 2.2[p] (−)40±2 s = 1.9[p] (35)	1.92 ±0.05	Λπ Σπ	88 ± 2 12 ± 2	208 117

Baryon Table *(cont'd)*

Particle[a]	I (J^P) — estab.	π or K beam[b] p_{beam} (GeV/c) $\sigma = 4\pi\lambda^2$ (mb)	Mass M[c] (MeV)	Full Width Γ[c] (MeV)	M^2 ±Γ/M[b] (GeV^2)	Partial decay mode[f] Mode	Fraction[e] %	p or q[d] p_{max} (MeV/c)
Σ(1660)[q]	1(1/2⁺)P'₁₁	p = 0.72 σ = 30.1	1580 to 1690	30 to 200 (100)	2.76 ±0.17	$\bar{K}N$	<30	402
						Σπ	seen	383
						Λπ	seen	440
Σ(1670)	1(3/2⁻)D⁻₁₃	p = 0.74 σ = 28.5	1675 ±10[c]	35 to 70 (50)	2.79 ±0.08	$\bar{K}N$	5-15	410
						Σπ	20-60	387
						Λπ	<30	447
Σ(1750)	1(1/2⁻)S⁻₁₁	p = 0.91 σ = 20.7	1730 to 1820	50 to 160 (75)	3.06 ±0.13	$\bar{K}N$	10-60	483
						Λπ	5-20	507
						Σπ	<8	450
						Ση	15-55	54
Σ(1765)	1(5/2⁻)D₁₅	p = 0.94 σ = 19.6	1774 ±7[c]	105 to 135 (120)	3.12 ±0.21	$\bar{K}N$	~41	496
						Λπ	~14	518
						Λ(1520)π	~19	187
						Σ(1385)π	~ 9	315
						Σπ	~ 1	461
Σ(1915)[g]	1(5/2⁺)F'₁₅	p = 1.25 σ = 13.0	1905 to 1930	70 to 160 (100)	3.67 ±0.19	$\bar{K}N$	5-15	612
						Λπ	10-30	619
						Σπ	seen	568
Σ(1940)[q]	1(3/2⁻)D'''₁₃	p = 1.32 σ = 12.0	1890 to 1960	100 to 300 (220)	3.76 ±0.43	$\bar{K}N$	<20	678
						Λπ	seen	680
						Σπ	seen	589
						Λ(1520)π	seen	370
Σ(2030)[g]	1(7/2⁺)F₁₇	p = 1.52 σ = 9.93	2020 to 2040	120 to 200 (180)	4.12 ±0.37	$\bar{K}N$	~20	700
						Λπ	~20	700
						Σπ	5-10	652
						Ξ̄K	<2	412
						Λ(1520)π	5-20	629
						Σ(1385)π	12	530
Σ(2250)[q]	1(?)[r]	p = 2.04 σ = 6.76	2200 to 2300	50 to 150 (100)	5.06 ±0.22	$\bar{K}N$	<10	849
						Λπ	seen	841
						Σπ	seen	801
Σ(2455)	1(?)	p = 2.57 σ = 5.09	~2455	~120 (120)	6.03 ±0.29	$\bar{K}N$	(J + 1/2)π ~0.2[k]	979
Σ(2620)	1(?)	p = 2.95 σ = 4.30	~2600	~200 (200)	6.86 ±0.52	$\bar{K}N$	(J + 1/2)π ~0.3[k]	1064
Ξ	1/2(1/2⁺)		(0)1314.9 (-)1321.3		1.729 1.746	See Stable Particle Table		
Ξ(1530)	1/2(3/2⁺)P₁₃		(0)1531.8±0.3 Γ = 1.3 F (-)1535.0±0.6	(0)9.1±0.5 (-)10.1±1.9 (10)	2.34 ±0.02	Ξπ	100	144
Ξ(1820)	1/2(3/2)		1823 ±6[c]	20^{+15}_{-10}[c] (20)	3.31 ±0.04	$\bar{K}N$	~45	396
						Σ(1530)π	~45	234
						ΞX	~10	306
						Ξπ	small	413
Ξ(2030)[g]	1/2(?)		2024 ±6[c]	16^{+15}_{-5}[c] (16)	4.12 ±0.03	ΞX	~80	524
						$\bar{K}N$	~20	587
						Ξπ	small	573
						Ξ(1530)π	small	418
Ω⁻	0(3/2⁺)		1672.2		2.796	See Stable Particle Table		

11.2 Die Bosoneneigenwertsgleichung

Geht man von /11.,3/ aus,so erhält man unter Anwendung der Fouriertransformation

$$\Phi\left(\begin{matrix}x_1 & x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) = (2\pi)^{-8}\int dq_1\,dq_2\; e^{-q_1 x_1}\; e^{-q_2 x_2}\;\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}q_1 & q_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) \qquad (11.2,1)$$

für /11.,3/:

$$\tilde{\Phi}'\left(\begin{matrix}p_1 & p_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) = \int dx_1\,dx_2\; e^{ip_1 x_1}\; e^{ip_2 x_2}\;\Phi'\left(\begin{matrix}x_1 & x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right)$$

$$= 2\,\frac{L^2}{2}\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(2\pi)^{-4}\int dq_1 dq_2\;\;\delta(q_1+q_2-p_1-p_2)\;\;\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}q_1 & q_2\\ \delta & \gamma\end{matrix}\,2\,Bo\right)\boxtimes$$

$$\boxtimes\;\;\tilde{G}_{\alpha_1\alpha}(p_1)\,\tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2) - \tilde{G}_{\alpha_2\alpha}(p_2)\,\tilde{F}_{\beta\alpha_1}(-p_1) \qquad (11.2,2)$$

Durch die Abspaltung des Gesamtimpulses des Bosons ergibt sich:

$$\Phi\left(\begin{matrix}x_1 & x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) = e^{\frac{1}{2}J(x_1+x_2)}\;\;\Phi\left(\begin{matrix}x_1 & -x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) \qquad (11.2,3)$$

und durch Fouriertransformation:

$$\Phi\left(\begin{matrix}x_1 & -x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) = (2\pi)^{-4}\int dq\;\; e^{-iq(x_1-x_2)}\;\;\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}q\\ \alpha_1\alpha_2\end{matrix}\,Bo\right) \qquad (11.2,4)$$

$$\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p_1 & p_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,2\,Bo\right) = (2\pi)^4\;\;\delta(J-p_1-p_2)\;\;\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p_1 & -\frac{J}{2}\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\,Bo\right)$$

Berücksichtigt man /11.2,3 und 4/ sowie /8.,5/, so ergibt sich für /11.2,2/:

$$\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p-\frac{J}{2}\\ \alpha_1\alpha_2\end{matrix}\,Bo\right) = 2\,\frac{L^2}{2}\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(2\pi)^{-4}\;\;\hat{\Phi}_{\delta\gamma}(Bo)\;\;\left[\;\tilde{G}_{\alpha_1\alpha}(p)\,\tilde{F}_{\beta\alpha_2}(p-J) - \tilde{G}_{\alpha_2\alpha}(J-p)\,\tilde{F}_{\beta\alpha_1}(-p)\;\right] \qquad (11.2,5)$$

Hierbei handelt es sich um eine Näherungsgleichung für die Funktion $\tilde{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2}$. Die Konstante $\hat{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2}$ ist infolge der Forminvarianz gegenüber den vorher in Abschnitt /5.4/ skizzierten Symmetrien als Eigenfunktion zu den Symmetrieeigenwertgleichungen aufzufassen. Spannt man diese Eigenfunktion im λ-Raum auf /8.,6+7/, so erhält man für /11.2,2/:

$$\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p_1 p_2\\ a_1 a_2\end{matrix}, B=0, I I_3, SS_3, \pm\right) = (2\pi)^4\ \delta(J-p_1-p_2)\ \tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p_1-\frac{J}{2}\\ a_1 a_2\end{matrix}, B=0, I I_3, SS_3, \pm\right)$$

$$= (-iL^2)(3-I(I+1))\ \delta(J-p_1-p_2)\ e_\mu(I, SS_3)\ \otimes$$

$$\otimes\left[\tilde{G}_{\alpha_1\alpha}(p_1)\ \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2) - \tilde{G}_{\alpha_2\alpha}(p_1)\ \tilde{F}_{\beta\alpha_1}(-p_1)\right]\otimes$$

$$\otimes\left[\left(\lambda_{\frac{1}{2}}\tau'(I I_3)\beta\gamma'^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\Phi}^{V} + \left(\lambda_2'\tau'(I I_3)\beta\gamma_5\gamma'^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\Phi}^{PV}\right]$$

(11.2,6)

Durch Aufspannen der $\hat{\Phi}$ -Funktionen nach Baryoneneigenfunktionen erhält man:

$$\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p_1 p_2\\ a_1 a_2\end{matrix}, B=0, I I_3, SS_3, \pm\right) =$$

$$iL^2\ (3-I(I+1))\ \delta(J-p_1-p_2)\ \otimes$$

$$\otimes\int_c^{\infty}\rho(m^2)\,dm^2\left\{\lambda^F_{\alpha_1}\lambda^A_{\alpha_2}\ \frac{\left(\not{p}_1\left[\hat{\Phi}^V+\gamma_5\hat{\Phi}^{PV}\right]\tau(I I_3)\not{\epsilon}(SS_3)\ (\not{p}_2-m)(\not{p}_2-\mu)^2\beta\right)_{\alpha_1\alpha_2}}{(p_1^2+i\varepsilon)\ (p_2^2-m^2+i\varepsilon)(p_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\right.$$

$$+\lambda^F_{\alpha_1}\lambda^A_{\alpha_2}\ \frac{\left((\not{p}_1+m)\left[\hat{\Phi}^V+\gamma_5\hat{\Phi}^{PV}\right]\tau(I I_3)\not{\epsilon}(SS_3)\ (\not{p}_1+\mu)^2\ \not{p}_2\beta\right)_{\alpha_1\alpha_2}}{(p_2^2+i\varepsilon)(p_1^2-m^2+i\varepsilon)(p_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$-\lambda^A_{\alpha_1}\lambda^F_{\alpha_2}\ \frac{\left((\not{p}_2\left[\hat{\Phi}^V+\gamma_5\hat{\Phi}^{PV}\right]\tau(I I_3)\not{\epsilon}(SS_3)\ (\not{p}_1-m)(\not{p}_1-\mu)^2\beta\right)_{\alpha_2\alpha_1}}{(p_2^2+i\varepsilon)\ (p_1^2-m^2+i\varepsilon)\ (p_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$\left.-\lambda^A_{\alpha_1}\lambda^F_{\alpha_2}\ \frac{\left((\not{p}_2+m)(\not{p}_2+\mu)^2\left[\hat{\Phi}^V+\gamma_5\hat{\Phi}^{PV}\right]\tau(I I_3)\not{\epsilon}(SS_3)\ \not{p}_1\beta\right)_{\alpha_2\alpha_1}}{(p_1^2+i\varepsilon)\ (p_2^2-m^2+i\varepsilon)\ (p_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\right\}$$

(11.2,7)

Die Bestimmung der Eigenwerte erfolgt durch die Integration über den Relativimpuls von $\tilde{\Phi}\left(\begin{matrix}p-\frac{J}{2}\\ a_1 a_2\end{matrix}, I I_3, SS_3, \pm\right)$:

$$\tilde{\Phi}^{FA, I I_3, SS_3, \pm}\left(\begin{matrix}p-\frac{J}{2}\\ a_1 a_2\end{matrix}\right) = i\,L^2\ (2\pi)^{-4}\ (3-I(I+1))\int_0^{\infty}dm^2\ \rho(m^2)\ \otimes$$

$$\otimes\left\{\frac{\left[\not{\epsilon}\left[\hat{\Phi}^V+\gamma_5\hat{\Phi}^{PV}\right]\tau(I I_3)\not{\epsilon}(SS_3)\ (\not{(J-p)}-m)(\not{(J-p)}-\mu)^2\beta\right]_{\alpha_1\alpha_2}}{(p^2+i\varepsilon)\ ((J-p)^2-m^2+i\varepsilon)\ ((J-p)^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left[(\not{p}+m)(\not{p}+\mu)^2\left[\hat{\Phi}^V+\gamma_5\hat{\Phi}^{PV}\right]\tau(I I_3)\not{\epsilon}(SS)\ \not{(J-p)}\ \beta\right]_{\alpha_1\alpha_2}}{((J-p)^2+i\varepsilon)\ (p^2-m^2+i\varepsilon)\ (p^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\right\}$$

(11.2,8)

Wobei

$$\hat{\phi}^{(V}_{PV)} := \hat{\phi}^{FA,I,S,\pm,V}_{PV} \quad \text{und} \tag{11.2,9}$$

$$\tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm}(p-\frac{J}{2})_{\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{2}\ Sp\ (\tau^{+}(II_3)\ \tilde{\phi}^{FA,II_3,SS_3,\pm}(p-\frac{J}{2})_{\alpha_1\alpha_2}) \tag{11.2,10}$$

Mit

$$(\tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm,V})_{\eta}(p-\frac{J}{2}) = \frac{1}{4}\ Sp\ (\beta\gamma_{\eta}\ \tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm}(p-\frac{J}{2})) \tag{11.2,11}$$

und

$$(\tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm,PV})(p-\frac{J}{2}) = \frac{1}{4}\ Sp\ (\beta\gamma_{\eta}\gamma_5\ \tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm}(p-\frac{J}{2})) \tag{11.2,12}$$

folgt:

$$(\tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm,V}_{PV})(p-\frac{J}{2}) = iL^3\ (2\pi)^{-4}(3-I(I+1))\ e_{\mu}(I,SS_3)\int dm^2\ \rho(m^2)\ \otimes$$

$$\otimes\Big[\frac{1}{(p^2+i\varepsilon)((J-p)^2-m^2)((J-p)^2-\mu^2)^2} + \frac{1}{((J-p)^2+i\varepsilon)(p^2-m^2)(p^2-\mu^2)^2}\Big]\ \otimes$$

$$\otimes\{[\hat{\phi}^{V}_{PV}(p_{\eta}(J-p)^{\mu}+(J-p)_{\eta}p^{\mu}-g_{\eta}^{\mu}\,p(J-p)) - i\hat{\phi}^{PV}_{V}\varepsilon_{\eta}^{\alpha\beta\gamma}p_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\ J_{\gamma}](J-p)^{\rho}(J-p)^{\rho}$$

$$+\mu^2[\hat{\phi}^{PV}_{V}(p_{\eta}(J-p)^{\mu}+(J-p)_{\eta}p^{\mu}-g_{\eta}^{\mu}\,p(J-p)) - i\hat{\phi}^{V}_{PV}\varepsilon_{\eta}^{\alpha\beta\gamma}p_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\ J_{\gamma}]$$

$$+2\kappa\mu[\hat{\phi}^{PV}_{V}(p_{\eta}(J-p)^{\rho}+(J-p)_{\eta}p^{\rho}-g_{\eta}^{\rho}\,p(J-p)) - i\hat{\phi}^{V}_{PV}\varepsilon_{\eta}^{\alpha\beta\gamma}p_{\alpha}\varepsilon_{\beta}\ J_{\gamma})]$$

(11.2,13)

Die Integration über alle mögliche Impulse ergibt:

$$\hat{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm}{}^{V}_{PV\,\eta} = \int d^4p\ \tilde{\phi}^{FA,I,SS_3,\pm,PV}(p-\frac{J}{2})$$

$$= 2iL^3\ (2\pi)^{-4}\ (3-I(I+1))\ e_{\mu}(I,SS_3)\int dm^2\ \rho(m^2)\ \hat{\phi}^{V}_{PV}\ \otimes$$

$$\otimes\int d^4p\ \frac{[p_{\eta}(J-p)^{\mu}+(J-p)_{\eta}p^{\mu}-g_{\eta}^{\mu}\,p(J-p)][(J-p)^{\rho}(J-p)^{\rho}+\mu^2+2\kappa\mu]\,f(p)\,f(J-p)}{(p^2+i\varepsilon)((J-p)^2-m^2)((J-p)^2-\mu^2)}$$

(11.2,14)

Berechnet man /11.2,14/ unter Beachtung von Anhang /A5/ und der Algebra:

$$-2\pi^2\,(3-l(l+1))\frac{L^2}{(2)^4}\int\rho(m^2)\,dm^2\,\frac{m^2+\mu^2+2\kappa\mu}{J^2}\Big[\frac{J_\mu J_\eta}{J^2}\,q_0+\Big(g_{\mu\eta}-\frac{J_\mu J_\eta}{J^2}\Big)\,q_1=0$$

(11.2,15)

mit

$$q_0=-\Big[\frac{3}{2}+\lambda^{-1}\Big(\ln|1-\lambda|\frac{7}{6}+\ln|\zeta|\Big(\frac{3}{2}\zeta^2-\frac{1}{3}\zeta^3\Big)+\ln|\delta|\Big(\frac{3}{2}\beta^2-\frac{1}{3}\beta^3\Big)-\frac{3}{2}\,\frac{\beta\lambda}{\delta}\Big)$$

$$+\frac{\delta}{\lambda}\Big(\ln|1-\lambda|\frac{1}{3}+\ln|\zeta|\Big(-3\zeta^2+\zeta+\frac{1}{3}\zeta^3\Big)+\ln|\delta|\Big(\frac{1}{2}\beta^2+\beta+\frac{1}{3}\beta^3\Big)$$

$$+\frac{\beta\lambda}{\delta\,3}+\frac{2\beta^2\lambda}{\delta}-\frac{\beta^2\lambda^2}{3\,\delta^2}\Big)$$

$$+\Big(\ln|\zeta|\,(2\zeta^2-2\zeta)+\ln|\delta|\,(-2\beta^2+2\beta)-\frac{2\,\beta\lambda}{\delta}\Big)\Big]$$

(11.2,16)

und

$$q_1=\frac{1}{2}+\lambda^{-1}\Big(\ln|1-\lambda|\frac{1}{6}+\ln|\zeta|\Big(\frac{1}{2}\zeta^2-\frac{1}{3}\zeta^3\Big)+\ln|\delta|\Big(-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{3}\beta^3\Big)-\frac{\beta\lambda\;2}{\delta\;6}$$

$$+\frac{\beta^2\lambda^2}{3\,\delta^2}-\frac{2}{3}\,\frac{\beta^2\lambda}{\delta}\Big)$$

$$+\frac{\delta}{\lambda}\Big(\ln|1-\lambda|\frac{1}{3}+\ln|\zeta|\Big(\frac{1}{3}\zeta^3+\zeta-\zeta^2\Big)+\ln|\delta|\,(\beta^2+\beta+\frac{1}{3}\beta^3)$$

$$+\frac{\beta\lambda\;2}{\delta\;6}+\frac{2\beta^2\lambda}{3\;\delta}-\frac{1\;\beta^2\lambda^2}{3\;\delta^2}\Big)$$

(11.2,17)

wobei

$$\lambda=\frac{J^2}{\kappa^2}\;;\;\zeta=\frac{-J^2+\mu^2}{\kappa^2-\mu^2}\;;\;\delta=\frac{\mu^2}{\kappa^2}\;;\;\beta=\frac{\mu^2}{\kappa^2-\mu^2}\qquad(11.2,18)$$

Berücksicht man, daß $\frac{J_\mu J_\nu}{J^2}$ ein Projektionsoperator für den Diracspin 0,

$g_{\mu\nu}-\frac{J_\mu J_\nu}{J^2}$ der Projektionsoperator für den Diracspin 1 ist, so bekommt man vier Gleichungen /B20/:

Interessant ist auch, daß der Beitrag der Unitarisierung in diesem Falle und bei diesem Graph nur einen Faktor 2 liefert, der keine Veränderungen bei der Berechnung der Massen bedingt. Zur genaueren Bestimmung des Unitarisierungsverfahrens wird auf den entsprechenden Graphen bei der Zwei-Teilchen-Zwei-Teilchen- Streuung verwiesen /Abschnitt 12.4/.

Spin	Isospin	
0	0	$1+\frac{3}{4}\left(\frac{\kappa L^2}{2^4\pi^4}\right)^2 q_0 \frac{\kappa^2+\mu^2+2\mu}{J^2} = 0$
0	1	$1+\frac{1}{4}\left(\frac{\kappa L^2}{2^4\pi^4}\right)^2 q_1 \frac{\kappa^2+\mu^2+2\mu}{J^2} = 0$
1	0	$1+\frac{3}{4}\left(\frac{\kappa L^2}{2^4\pi^4}\right)^2 q_0 \frac{\kappa^2+\mu^2+2\mu}{J^2} = 0$
1	1	$1+\frac{1}{4}\left(\frac{\kappa L^2}{2^4\pi^4}\right)^2 q_1 \frac{\kappa^2+\mu^2+2\mu}{J^2} = 0$

(11.2,19)

Die berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

Wegen der Symmetrieeigenschaften der reduzierten Matrix, die in Abschnitt /5.4/ hergeleitet wurde, erhält man unter Beachtung von /5.4.5,6/:

$$\phi^{sI}_{jj_s}(-p_0,p_1) = -(-1)^s\, C \otimes P\, \phi^{sI}_{jj_s}(p_0,p_1) \qquad (11.2,20)$$

Für die hier berechnete Kontaktgraphnäherung bedeutet dies, daß folgende Möglichkeit ausgeschlossen ist:

$$\eta_p\, \eta_c = 1 \qquad (11.2,21)$$

Insofern ist es nicht möglich, in dieser Näherung die folgenden Teilchen zu berechnen:

$$S^*(980);\ \epsilon(1300);\ \chi(3413) \qquad (11.2,22)$$

Nimmt man aber die volle 1. Näherung, so erkennt man, daß die Gleichungen /11.2,19/ ebenfalls Lösungen der vollen ersten Näherung sind. Die volle erste Näherung besteht allerdings nicht nur aus dem Kontaktgraphen, so daß die theoretischen Beschränkungen nun nicht mehr gelten.

In Tabelle werden die experimentellen Bosonenmassen mit den von mir berechneten Werten verglichen. Tabelle ist eine Zusammenstellung aller bisher bekannten experimentellen Bosonenmassen in dem von mir berechneten Bereich. Die + in Tabelle stellen Resonanzen dar, die noch nicht mit entgültiger Sicherheit nachgewiesen werden konnten.

Tabelle 6

Vergleich zwischen den berechneten und den experimentell ermittelten Massen der Bosonen mit Spin= 0 und Isospin= 0

Name	S^P I^G C	exper. Wert	theor. Wert
Hj1	0 0	----------	110 £
η	0^- 0^+ +	548.6	638
Hj2	0 0	----------	702
η	0^- 0^+ +	957.6	1110
S*	0^+ 0^+ +	980	1126
ε	0^+ 0^+ +	1300	1138
Hj3	0 0	----------	1950
χ	0^+ 0^+ +	3413	3138

Tabelle 7

Vergleich zwischen den berechneten und den experimentell ermittelten Massen der Bosonen mit Spin = 0 und Isospin = 1

Name	S^P I^G C	exper. Wert	theor. Wert
π^0	0^- 1^-	134.96	110 £
Hj4	0 1	----------	638
Hj5	0 1	----------	702
Hj6	0 1	----------	1110
δ	0^+ 1^- +	980	1126
Hj7	0 1	----------	1138
Hj8	0 1	----------	1950
Hj9	0 1	----------	3138

Tabelle 8

Vergleich zwischen den berechneten und den experimentell ermittelten Masen der Bosonen mit Spin= 1 und Isospin= 0

Name	S^P I^G C	exper. Wert	theor. Wert
Hj10	1^- 0^- -	----------	386
Hj11	1^- 0^- -	----------	758
ω	1^- 0^- -	782.6	762
Hj12	1^- 0^- -	----------	882
Hj13	1^- 0^- -	----------	906
Hj14	1^- 0^- -	----------	914
Hj15	1^- 0^- -	----------	926
Hj16	1^- 0^- -	----------	942
ϕ	1^- 0^- -	1019.6	958
Hj17	1^- 0^- -	----------	1038
D	1^+ 0^+ +	1282	1042
Hj18	1^- 0^- -	----------	1528
ψ	1^- 0^- -	3097	3820

Tabelle 9

Vergleich zwischen den berechneten und den experimentell ermittelten Massen der Bosonen mit Spin= 1 und Isospin = 1

Name	S^P I^G C	exper. Wert	theor. Wert
Hj19	1 1	----------	386
Hj20	1 1	----------	758
ρ	1^- 1^+ -	776	762
Hj21	1 1	----------	882
Hj22	1 1	----------	906
Hj23	1 1	----------	914
Hj24	1 1	----------	926
Hj25	1 1	----------	942
Hj26	1 1	----------	958
A_1	1^+ 1^- +	1100	1038
B	1^+ 1^+ -	1231	1042
ρ	1^- 1^+ -	1600	1528
Hj27	1 1	----------	3838

Tabelle 10

Name	$I^G J^{PC}$	Masse M (MeV)	volle Breite Γ (MeV)	$\pm\Gamma_M$, M^2 $(GeV)^2$	Zerfallsarten Modus	Fraktionen (%) obere Grenze 1σ %	P_{max} (MeV/c)
$\pi^\pm$	$1^-(0^-)+$	139.57	0.0	0.019479			
π^0		134.96	7.95 eV ±.55 eV	0.018215			
η	$0^+(0^-)+$	548.8 ±0.6	0.85 keV ±.12 keV	0.301 ±.000	Neutral Geladen	71.0 29.0	
ρ(770)	$1^+(1^-)-$	776 ±3	155 ±3	0.602 ±.120	ππ πγ e^+e^- $\mu^+\mu^-$ ηγ	≈100 0.024 ±.007 0.0043±.0005 0.0057±.0012 *	362 375 388 373 194
ω(783)	$0^-(1^-)-$	782.6 ±0.3 S=1.3[a]	10.1 ±.3	0.612 ±.008	$\pi^+\pi^-\pi^0$ $\pi^0\gamma$ e^+e^- ηγ	89.9±0.6 1.3±0.5 8.8±0.5 0.0070±.0017 *	327 366 383 391 199
η'(958)	$0^+(0^-)+$	957.6 ±0.3	< 1	0.917 <.001	ηππ $\rho^0\gamma$ ωγ γγ	66.2±1.7 29.8±1.7 *3.1±0.4* 2.0±0.3	231 165 159 479
f(980)	$1^-(0^+)+$	980 ±5	50 ±10	0.960 ±.049	ππ $K\bar{K}$	* *	318
$S^*(980)$	$0^+(0^+)+$	∿ *980* ±*10*	40 ±10	0.960 ±.039	$K\bar{K}$ ππ	* *	470
φ(1020)	$0^-(1^-)-$	1019.6 ±0.2 S=1.5[a]	4.1 ±.2	1.040 ±.004	K^+K^- K_LK_S $\pi^+\pi^-\pi^0$ (incl. ρπ) ηγ $\pi^0\gamma$ e^+e^- $\mu^+\mu^-$	48.6±1.2 35.1±1.2 *14.7±0.7* 1.6±0.2 0.14±0.05 .031±.001 .035±.003	128 111 462 362 501 510 499
$A_1(1100)$	$1^-(1^+)+$	∿ 1100	∿ 300	1.21 ±.53	ρπ	∿ 100	249
B(1235)	$1^+(1^+)-$	1231 ±6	128 ±10	1.52 ±.16	ωπ		347
A(1270)	$0^+(1^+)+$	1271 ±3	180 ±20	1.62 ±.23	ππ $2\pi^+2\pi^-$ $K\bar{K}$ $\pi^+\pi^-2\pi^0$	80.3±0.3 2.8±0.3 3.1±0.4 *	620 557 555 560
D(1285)	$0^-(1^+)-$	1282 ±6[§]	25 ±10[§]	1.64 ±.03	$K\bar{K}\pi$ ηππ 6π $2\pi^+2\pi^-$ (prob. $\rho^0\pi^+\pi^-$)	* * * *	501 481 438 563
E(1300)	$0^+(?^+)+$	∿ 1300	*200–400*		ππ $K\bar{K}$	* *	

Tabelle 10 Fortsetzung

ψ(3100) or J	$0^-(1^-)$-	3097±2	0.067±0.012	9.598 ±.000	e^+e^-	7±1	1549
					$\mu^+\mu^-$	7±1	1545
					hadrons	86±2	
					$2(\pi^+\pi^-)\pi^0$	3.7±0.6	1496
					$3(\pi^+\pi^-)\pi^0$	2.9±0.7	1433
					$\pi^+\pi^-\pi^0 K^+K^-$	1.2±0.3	1369
					$\rho\pi$	1.1±0.5	1448
					$4(\pi^+\pi^-)\pi^0$	0.9±0.3	1345
					$K^{*0}(890)\ \bar{K}^{*0}(1430)$	0.6?±0.26	1007
					$K\bar{K}$	0.6±0.08	1573
					$p\bar{p}\pi^+\pi^-$	0.4±0.05	1105
					$2(\pi^+\pi^-)$	0.4±0.1	1517
					$3(\pi^+\pi^-)$	0.4±0.2	1466
					$p\bar{p}\pi^0$	0.38±0.04	1171
					$2(\pi^+\pi^-)K^+K^-$	0.31±0.13	1331
					$K^0_SK^-\pi^+$	0.26±0.07	1441
					$\phi\pi^+\pi^-$	0.21±0.05	1365
					$p\bar{p}$	0.21±0.02	1231
					$p\bar{p}\eta$	0.19±0.04	933
					$\phi K\bar{K}$	0.18±0.05	1176
					$\Lambda\bar{\Lambda}$	0.16±0.03	1075
					$p\bar{p}\pi^+\pi^-\pi^0$	0.11±0.04	1033
					$p\bar{p}\pi^0$	0.11±0.03	1276
					$\phi\eta$	0.10±0.04	1320
					$\gamma\eta'$	0.08±0.04	1401
					γf	0.20±0.07	1285
					$\gamma X(2830)\to 3\gamma$	0.14±0.04	256
$\chi(3415)$	$0^+(0^{++})$+	3413±5		11.649	$2(\pi^+\pi^-)$	4.4±0.8	1678
					$\pi^+\pi^-K^+K^-$	3.7±1.0	1579
					$\gamma J/\psi\ 3100)$	3.3±1.0	300
					$3(\pi^+\pi^-)$	1.9±0.7	1632
					$\pi^+\pi^-$	1.0±0.3	1701
					K^+K^-	1.0±0.3	1634
					$p\bar{p}\pi^+\pi^-$	0.6±0.2	1519
P_c or $\chi(3510)$	$0^+(A)$+	3508±4		12.306	$\gamma J/\psi(3100)$	23.4±0.6	368
					$3(\pi^+\pi^-)$	2.4±0.6	1662
					$2(\pi^+\pi^-)$(incl. $\pi\pi\rho$)	1.6±0.6	1727
					$\pi^+\pi^-K^+K^-$ (incl. $\pi K\bar{K}^*$)	0.9±0.4	1632
					$\pi^+\pi^-p\bar{p}$	0.1?±0.12	1561
$\chi(3555)$	$0^+(N)$+	3554±5		12.631	$\gamma J/\psi(3100)$	16±3	427
					$\pi^+\pi^-K^+K^-$(incl. $\pi K\bar{K}^*$)	2.0±0.6	1655
					$3(\pi^+\pi^-)$	1.1±0.7	1706
					$\pi^+\pi^-$ and K^+K^-	0.23±0.08	
					$\pi^+\pi^-p\bar{p}$	0.29±0.14	1408
$J^P = 1^+$ preferred.					$2(\pi^+\pi^-)$ (incl. $\pi\pi\rho$)	0.23±0.08	1750
$\psi'(3685)$	$0^-(1^-)$-	3686±3	0.228±0.056	13.587 ±.001	e^+e^-	0.9±0.1	1842
					$\mu^+\mu^-$	0.8±0.2	1839
					hadrons	98.1±0.3	
					$\pi^+\pi^-[J/\psi\to e^+e^-]$	33±3]	474
					$\pi^+\pi^-[J/\psi\to\pi^+\pi^-]$	17±2]	478
					$\pi^+\pi^-[J/\psi\ \eta]$	4.2±0.7]	189
					$\pi^+\pi^-[2(\pi^+\pi^-)\pi^0$	0.4±0.1]	1758
					$\pi^+\pi^-[\pi^+\pi^-K^+K^-$	0.14±0.04]	1725
					$\pi^+\pi^-[2(\pi^+\pi^-)$	0.08±0.02]	1810
					$\pi^+\pi^-[\gamma\ \chi(3415)$	7±2]	261
					$\pi^+\pi^-[\gamma\ \chi(3510)$	7±2]	172
					$\pi^+\pi^-[\gamma\ \chi(3555)$	7±2]	128

* = beobachtet
** = wahrscheinlich beobachtet

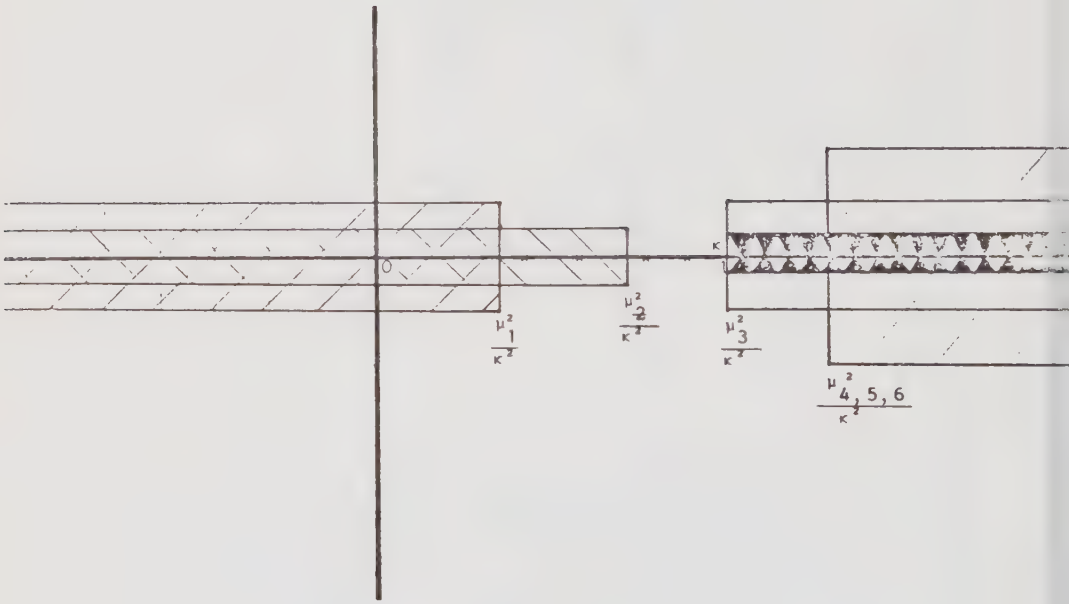
◇ = dominant
◇◇ = große Fraktion
◇◇◇ = kleine "

Tabelle 10 b

J	T	η_p	η_c	m [MeV]	Particle	exp. [MeV]
0	0	−1	+1	896	η	549
				(953)	η'	958
				1698	E	1420
0	1	−1	+1	(1075)	π	140
				1203	$D(?)$	1285
0	0	+1	−1	–	–	–
0	1	+1	−1	–	–	–
1	0	+1	+1	–		
1	1	+1	+1	915	A_1	1100
				(962)		
1	0	−1	−1	930	ω	784
				(948)	φ	1019
1	1	−1	−1	934	ϱ	770
				(944)		

Die besten Ergebnisse, die bislang innerhalb der Arbeitsgruppen von Prof. Dürr und Prof. Stumpf erzielt worden sind, sind die von Dr. Bauhoff /Mass Renormalization and Chiral Symmetry Breaking in Nonlinear Spinor Theory Z.f. Naturf. 30a,1215,1975/. Wie man sieht, können diese Berechnungen nicht einmal sämtliche Teichen annähernd richtig beschreiben.

Abbildung 14 Schnittstruktur der Bosoneneigenwertgleichung im λ-Raum



Logarithmische Verzweigungsschnitte für die verschiedenen Geistermassen bei der Hauptwertvorschrift. Der eine Schnitt bei 1 muß als unphysikalisch angesehen werden; dieser Schnitt rührt daher, daß im Integralkern noch die Greenfunktion G auftritt.

Die berechneten Werte könnten durch eine Fitprozedur in den Parametern μ und L wesentlich verbessert werden. Hiervon wurde unter Verzicht auf ein besseres Ergebnis jedoch Abstand genommen, um die selbstkonsistente Berechnung sämtlicher Parameter auf dieser Näherungsstufe zu gewährleisten. Hierbei spielte auch der Gedanke, die nichtlineare Spinortheorie auf keinen Fall in eine phänomenologische Theorie umzuwandeln, eine wesentliche Rolle.

Die Schnittstruktur wurde unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Abschnitt 9.3 erstellt. Es fällt auf, daß in diesem Falle der Doppelschnitt bei 1 zum Teil durch den Geist verursacht wird. Dieser Schnitt erhält dadurch eine physikalische Bedeutung.

Die hier berechneten Bosonen, welche in Tabelle 3 aufgelistet sind, weisen für die verwendeten Parameter des Systems alle eine positive Norm auf /siehe Kap. 9/.

12. Die Streugleichungen

In diesem Kapitel werden die Nukleon-Nukleon-Streuung und die Pion-Nukleon-Streuung, ein Zwei- bzw. Dreiteilchenfall, berechnet. Außerdem werden die relativistischen Analoga der Lippmann-Schwingergleichung und der Faddeev-Gleichung aufgestellt.

12.1 Der Energieerhaltungssatz

Unter Ausschaltung der Wechselwirkung sind die Selbstenergieoperatoren nach dem Fundamentalsatz der Algebra in nullter Näherung gegeben durch: (mit $\kappa = m$)

$$(\Box_x + m^2)\,\phi = 0 \qquad (12.1,1)$$

und der Selbstenergieterm im Zweiteilchenfall wird durch

$$[(\Box_{x_1} + m_1^2) \otimes 1 + 1 \otimes (\Box_{x_2} + m_2^2) + V_{12}]\,\phi_{12} = 0 \text{ dargestellt.} \qquad (12.1,2)$$

ϕ soll dabei eine Testfunktion sein und V_{12} ein Potential, das nur von den Relativkoordinaten der Teilchen abhängt.

Nach Fouriertransformation erhält man für /12.1,2/:

$$0 = [(p_1^2 + p_2^2 - m_1^2 - m_2^2) - V]\,\phi \qquad (12.1,3)$$

In zweiter Näherung soll der Selbstenergieterm nicht durch /12.1,2/ dargestellt werden, sondern:

$$\left\{[(\Box_{x_1} + m_1^2) + (\Box_{x_2} + m_2^2)][(\Box_{x_1} + \mu_1^2) + (\Box_{x_2} + \mu_2^2)]^2 + V_{12}\right\}\phi = 0 \qquad (12.1,4)$$

und nach Fouriertransformation erhält man:

$$[(p_1^2 + p_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(p_1^2 + p_2^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2)^2 - V]\,\phi = 0 \qquad (12.1,5)$$

Die S-Matrix im Konfigurationsraum ist durch /3.3,11/ gegeben. Mit den Orthonormierungsbedingungen

$$(\phi_a^- \,|\, \phi_b^-) = (\phi_a^+ \,|\, \phi_b^+) = \delta_{ab}$$

erhält man für die Streufunktionen:

$$|\phi_a^+\rangle = |\phi_a^-\rangle + (G_a^+ - G_a^-)\,|V\,\phi_a^0\rangle \qquad (12.1,6)$$

Für die S-Matrix gilt dann:

$$S_{ab} = \delta_{ab} + \langle \phi_b^- | V\,[G_a^+ - G_a^-]\,\phi_a^0\rangle \qquad (12.1,7)$$

und unter Benutzung der Gleichung /12.1,4/ erhält man:

$$\{G_a^+ - G_a^-\}\,\phi = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{1}{p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 - m_1^2 - m_2^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 - m_1^2 - m_2^2 - i\varepsilon}\right]\phi \qquad (12.1,8$$

Die S-Matrix nimmt schließlich folgende Form an:

$$S_{ab} = \delta_{ab} + 2\pi i\ \delta(p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 - m_1^2 - m_2^2) \langle \phi_b^- | V\ \phi_a^+ \rangle \qquad (12.1,9)$$

Auch in erster Näherung der Eigenwertgleichung folgt dasselbe Resultat für die Energierhaltung wie in nullter Näherung. Für die zweite Näherung /12.1,4/ erhält man in Analogie zu /12.1,9/ für die S-Matrix:

$$S_{ab} = \delta_{ab} + 2\pi i\ \delta(p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 - m_1^2 - m_2^2)\ \frac{1}{(p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2)^+}\ \langle \phi_b^- | V\ \phi_a^+ \rangle$$

(12.1,10)

12.2 Der Wechselwirkungsoperator für die Nukleon-Nukleon-Streuung in Kontaktgraphnäherung

Der Wechselwirkungsoperator für die Nukleon-Nukleon-Streuung wird aus den Kanalgleichungen (Kapitel 7) berechnet. Hierzu wird im folgenden die von Stumpf eingeführte verkürzte Schreibweise benutzt. Außerdem wird der für die Nukleon-Nukleon-Streuung relevante Term ausschließlich betrachtet. Aus /7.,7/ erhält man für $f=1,2$ nach Funktionalintegration und Projektion auf einen Zweiteilchenzustand:

$$\bar{V}_{12} = \langle D_2 | \{ (1-\delta_{ij}) P_2 \int \delta(j_{\alpha_1}^1 + j_{\alpha_2}^2)\ A_1^{ij} \} | D_2 \rangle$$

$$= -\langle \phi_0 |\ \partial_{\alpha_1}^1\ \partial_{\alpha_2}^2 \int \delta(j_\alpha^1 + j_\alpha^2)\ G_{\alpha\alpha'} V_{\alpha\beta\gamma\delta}\ F_{\beta\beta'} [\, j_{\beta'}^1 \partial_\gamma^1 \partial_\delta^2 + j_{\beta'}^1 \partial_\gamma^2 \partial_\delta^1 + j_{\beta'}^1 \partial_\gamma^2 \partial_\delta^2 + j_{\beta'}^2 \partial_\gamma^1 \partial_\delta^1$$
$$+ j_{\beta'}^2 \partial_\gamma^1 \partial_\delta^2 + j_{\beta'}^2 \partial_\gamma^2 \partial_\delta^1]\ \ j_{\beta_1}^1\ \ j_{\beta_2}^2\ | \phi_0 \rangle \qquad (12.2,1)$$

Mit den Vertauschungsrelationen /7.,2/ erhält man:

$$\bar{V}_{12} = -2\ V_{\alpha\beta\gamma\delta} [\, G_{\alpha_1\alpha'} F_{\beta\alpha_2} - G_{\alpha_2\alpha'} F_{\beta\alpha_1}] \qquad (12.2,2)$$

12.3 Berechnung der R- und T-Matrix in Bornscher Näherung

Die R-Matrix ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$S_{ab} = \delta_{ab} + R_{ab} \qquad (12.3.1)$$

In Bornscher Näherung erhält man für R_{ab} durch ϕ- und δ-Funktionen ausgedrückt:

$$R^{*\,nn}_{ab\,nn} = -2\pi i \,\frac{\delta(K_{a_1}^2+K_{a_2}^2-\kappa_1^2-\kappa_2^2)}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2} \int d^4q_1\, d^4q_2\, \tilde{\phi}^{*nn}_{a_2}(q_1q_2|b)\, \tilde{\phi}'^{nn}_{a_1}(q_1q_2|a)\, C_1C_2 \qquad (12.3,2)$$

unter Berücksichtigung der Abkürzung $\phi'(a) = V\,\phi^0(a)$.

Setzt man hierfür Formel /12.2,2/ ein, so bekommt man:

$$\tilde{\phi}_2^{nn} = -2\,L^2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(2\pi)^{-4} \int d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2\, \delta^*(q_1+q_2-p_1-p_2)\, \tilde{\phi}^f(p_\delta p_\gamma|a) \boxtimes$$

$$\boxtimes\,[\,\tilde{G}_{a_1\alpha}(q_1)\,\tilde{F}_{\beta a_2}(-q_2) - \tilde{G}_{a_2\alpha}(q_2)\,\tilde{F}_{\beta a_1}(-q_1)\,] \qquad (12.3,3)$$

Unter Beachtung von /8.,2/u./9.2,1-5/ erhält man hierfür in erster Näherung mit

$$\tilde{\phi}^f(p_\delta p_\gamma|a) = (2\pi)^6 \sum_{\lambda_1'\lambda_2'} (-1)^P\, \delta^*(p_1-K_{a_{\lambda_1'}})\, \delta^*(p_2-K_{a_{\lambda_2'}})\, u_\delta(\not{q}_1)\, u_\gamma(\not{q}_2)$$

und

$$\tilde{\sigma}^{f*} = (2\pi)^6 f_n(q_1^\circ)\, f_n(q_2^\circ) \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-1)^P\, \delta^3(q_1-K_{b_{\lambda_1}})\, \delta^3(q_2-K_{b_{\lambda_2}})\, u^*_{a_1}(\not{q}_1)\, u^*_{a_2}(\not{q}_2) \qquad (12.3,4)$$

Setzt man /12.3,3/ und /12.3,4/ in /12.3,2/ ein, so erhält man:

$$R^{*\,nn}_{ab\,nn} = (2\pi i)\,\frac{\delta(K_{a_1}^2+K_{a_2}^2-\kappa_1^2-\kappa_2^2)}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2}\, 2L^2\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(2\pi)^8 \int d^4q_1 d^4q_2\, f_n(q_1^\circ)\, f_n(q_2^\circ) \boxtimes$$

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^P \sum_{\lambda_1'\lambda_2'}(-1)^P\, u^*_{a_1}(q_1)\, u^*_{a_2}(q_2)\, u_\delta(p_1)\, u_\gamma(p_2) \boxtimes$$

$$\int d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2\, \delta^*(q_1+q_2-p_1-p_2)\, \delta^*(p_1-K_{a_{\lambda_1'}})\, \delta^*(p_2-K_{a_{\lambda_2'}}) \boxtimes$$

$$\delta^3(q_1-K_{b_{\lambda_1}})\, \delta^3(q_2-K_{b_{\lambda_2}}) \boxtimes$$

$$C_1C_2\,\Big\{\frac{(\lambda_2'\not{q}_1\beta)_{\alpha_1\alpha}\,[\,(\lambda_2'(-\not{q}_2+i\kappa)\beta)\;(\lambda_2'(-\not{q}_2+i\mu)\beta)^2\,]_{\beta a_2}}{q_1^2\qquad (q_2^2-\kappa^2+i\varepsilon)\,(q_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$-\frac{(\lambda_2'\not{q}_2\beta)_{\alpha_2\alpha}\,[\,(\lambda_2'(-\not{q}_1+i\kappa)\beta)\;(\lambda_2'(-\not{q}_1+i\mu)\beta)^2\,]_{\beta a_1}}{q_2^2\qquad (q_1^2-\kappa^2+i\varepsilon)\,(q_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}\Big\} \qquad (12.3,5)$$

Nach Integration über p_1 und p_2 und Beachtung der Delta-Distributionen sowie nach Integration über q_1 und q_2 erhält man schließlich:

$$R^{*\,nn}_{ab\,nn} = i(2\pi)^{14}\, 2L^2\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^{P_\lambda} \sum_{\lambda_1'\lambda_2'}(-1)^{P_\lambda} \frac{\delta(K_{a_1}^2+K_{a_2}^2-K_{b_{\lambda_1}}^2-K_{b_{\lambda_2}}^2)}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2}$$

$$u^*_{a_1}(K_{b_{\lambda_1}})\, u^*_{a_2}(K_{b_{\lambda_2}})\, u_\delta(K_{a_{\lambda_1'}})\, u_\gamma(K_{a_{\lambda_2'}})\, \delta^3(K_{a_{\lambda'}}-K_{b_\lambda})\, w_{\kappa_1}\, \bar{w}_{\kappa_2}\, C_1C_2 \qquad (12.3,6)$$

$$\Big\{\frac{(\lambda_2'((\;w_{\kappa_1}\;)\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})\beta)_{\alpha_1\alpha}\,[\,(\lambda_2'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\kappa)\beta)\,(\lambda_2'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\mu$$

$$2\,w_{\kappa_2}\,[(\;w_{\kappa_1}\;)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_1}})^2\,]\,[\kappa_2^2-\mu_2^2]^2$$

$$-\frac{(\lambda_2'((\;w_{\kappa_2}\;)\beta-\bar{K}_b)\beta)_{\alpha_2\alpha}\,[\,(\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})+i\kappa)\beta)\,(\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\mu)\beta)}{2\,w_{\kappa_1}\,[(\;w_{\kappa_2}\;)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_2}})^2\,]\,[\kappa_1^2-\mu_1^2]^2}$$

Bislang wurden die f_n's nur an den Stellen w_κ und w_μ bestimmt (siehe Abschnitt 9.2). Bei der Umkehrung der $(F^+)^{-1}$-Funktionen in die Anfangs-(F^+)-Funktionen wird deutlich, daß es andere als diese Stellen gibt, an denen die f-Funktionen definiert werden können. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die Annahme, daß die f-Funktionen nur an den Stellen w_κ und w_μ definiert sind. Unter Berücksichtigung dieser Annahme gelangt man zu /12.3,6/.

Nach Ausreduktion im λ-Raum ergibt sich:

$$R^*_{ab} = -i\,(2\pi)^{\mu}\,\frac{8}{3}\,L^2\,\delta^4(K^2_{a_1}+K^2_{a_2}-K^2_{b_1}-K^2_{b_2})\,\delta^4(K_{a_1}+K_{a_2}-K_{b_1}-K_{b_2})\;u^*_\alpha(K_{b_1})\;u^*_\alpha(K_{b_2})\;u_\delta(K_{a_1})\;u_\gamma(K_{a_2})$$
$$[(c_\tau\overset{+}{\tau}^T c)_{\alpha\beta}\;(c_\tau\overset{+}{\tau} c)_{\gamma\delta} + (c_\tau\overset{+}{\tau}\gamma_5 c)_{\alpha\beta}\;(c_\tau\overset{+}{\tau}\gamma_5 c)_{\gamma\delta}]\;w_{\kappa_1}\;w_{\kappa_2}\;C_1\,C_2$$
$$\Big\{ -\frac{((w_{\kappa_1}\beta-\overline{K}_{b_1})\beta)_{\alpha_1\alpha}\;((w_{\kappa_2}\beta-\overline{K}_{b_2}+\kappa)\beta)^T_{\beta\alpha_2}\;(((w_{\kappa_2}\beta-\overline{K}_{b_2}+\mu)\beta)^T)^2_{\beta\alpha_1}}{w_{\kappa_2}\quad 2\quad(\kappa_2^2-\mu_2^2)^2\;\kappa_1^2\;(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2}$$
$$-\frac{((w_{\kappa_1}\beta-\overline{K}_{b_2})\beta)_{\alpha_2\alpha}\;((w_{\kappa_1}\beta-\overline{K}_{b_1}+\kappa)\beta)^T_{\beta\alpha_1}\;(((w_{\kappa_1}\beta-\overline{K}_{b_1}+\mu)\beta)^T)^2_{\beta\alpha_1}}{w_{\kappa_1}\quad 2\quad(\kappa_1^2-\mu_1^2)^2\;\kappa_2^2\;(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2}\Big\} \qquad (12.3,7)$$

und nach Ausreduktion im Isospinraum sowie nach Ausnutzung der Diracgleichungen $u^*_\alpha(K_b)(K_b)_{\alpha\beta}=\kappa\,u^*_\beta(K_b)$; $u^*_\alpha(K_b)\,\beta_{\alpha\gamma}=\overline{u}_\gamma(K_b)$ erhält man:

$$R^{*\,nn}_{ab\,nn} = -\frac{4}{3}(2\pi i)(2\pi)^{8}\;L^2\,\delta^4(K^2_{a_1}+K^2_{a_2}-K^2_{b_1}-K^2_{b_2})\;\delta^4(K_{a_1}+K_{a_2}-K_{b_1}-K_{b_2})\;u_\delta(K_{a_1})\;u_\gamma(K_{a_2})$$
$$M(a,b)\;[\,C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}+(\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 C)_{\gamma\delta}\,]\;w_{\kappa_1}\;w_{\kappa_2}\;C_1\;C_2\;\frac{1}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2}$$
$$\cdot/\text{siehe } 12.4,5/$$
$$\Big\{ -\frac{[\,2\kappa_2\kappa_1\overline{u}_{\alpha_2}\;\overline{u}_{\alpha_1}\,][((K_{b_2}+\mu)\beta)^T_{\beta\alpha_2}]^2}{w_{\kappa_2}\quad 2\quad(\kappa_2^2-\mu_2^2)^2\;\kappa_1^2}$$
$$-\frac{[\,2\kappa_1\kappa_2\overline{u}_{\alpha_1}\;\overline{u}_{\alpha_2}\,][((K_{b_1}+\mu)\beta)^T_{\beta\alpha_1}]^2}{w_{\kappa_1}\quad 2\quad(\kappa_1^2-\mu_1^2)^2\;\kappa_2^2}\Big\} \qquad (12.3,8)$$

mit den Isospinmatrixelement

$$M(a,b) = T^{b_1}_{\beta}{}^{*}\;T^{b_2}_{\alpha}{}^{*}\;T^{a_1}_{\delta}\;T^{a_2}_{\gamma}\;(c_\tau\overset{+}{\tau}^T)_{\alpha\beta}\;(c_\tau\overset{+}{\tau})_{\gamma\delta} = 2 \qquad (12.3,9)$$

für die Proton-Proton-Streuung bzw. für die Neutron-Neutron-Streuung und

$$M(a,b) = T^{b_1}_{\beta}{}^{*}\;T^{b_2}_{\alpha}{}^{*}\;\frac{1}{\sqrt{2}}\;(T^{a_1}_{\delta}T^{a_2}_{\gamma}+T^{a_2}_{\delta}T^{a_1}_{\gamma})(c_\tau\overset{+}{\tau}^T)_{\alpha\beta}\;(c_\tau\overset{+}{\tau})_{\gamma\delta} = \sqrt{2} \qquad (12.3,10)$$

Hinzu kommen noch die Isospinmatrixelemente für die Streuungen mit Antiteilchen, die z.B. folgende Form annehmen können:

$$M(a,b) = T^{b_1}_{\alpha}\,T^{b_2}_{\beta}\,\tau(I,I_3)^{a_1\,a_2}_{\delta\gamma}\;(3\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta}+\overset{+}{\tau}_{\alpha\beta}\overset{+}{\tau}_{\gamma\delta}) \qquad (12.3,11)$$

Insgesamt erhält man für das Isospinmatrixelement, das die Nukleon-Nukleon-Streuung herausfiltert:

$$M(a,b)=\begin{cases} & & I^a=0,\ I_3^a=0 \\ -\sqrt{2} & p\bar{n}\to p\bar{n} & I^a=1,\ I_3^a=1 \\ 2 & p\bar{p}\to p\bar{p};\ p\bar{p}\to n\bar{n} & I^a=1,\ I_3^a=0 \\ -2 & n\bar{n}\to n\bar{n};\ n\bar{n}\to p\bar{p} & \\ \sqrt{2} & n\bar{p}\to n\bar{p} & \\ 2 & pp\to pp;\ nn\to nn & \\ \sqrt{2} & pn\to pn & \\ 0 & \text{sonst} & \end{cases} \qquad (12.3,12)$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes wird das Betragsquadrat der physikalischen T-Matrix benötigt.

12.4 Berechnung des Wirkungsquerschnittes

Um Polarisationseffekte bei den Rechnungen außer acht zu lassen, muß bei den Berechnungen des Betragsquadrates der T-Matrix über Anfangspins gemittelt und über Endspins summiert werden. Es soll gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{S_{a_1}^3} u_\delta(K_{a_1},S_{a_1}^3)\,\bar{u}_{\delta'}(K_{a_1},S_{a_1}^3) &= (2\kappa)^{-1}\,[(\not{K}_{a_1}+\kappa)\beta]_{\delta\delta'} \\ \sum_{S_{a_1}^3} u^*_{\alpha_1}(K_{b_1},S_{b_1}^3)\,\overline{u^*_{\alpha_1'}}(K_{b_1},S_{b_1}) &= (2\kappa)^{-1}\,[\beta(\not{K}_{b_1}+\kappa)]^T_{\alpha_1\alpha_1'} \end{aligned} \qquad (12.4,1)$$

Dadurch folgt

$$|T_{ab}|^2_{\text{unpolarisiert}} = \frac{1}{4}\sum_{\substack{S_{a_1}^3 S_{a_2}^3 \\ S_{b_1}^3 S_{b_2}^3}} T^*_{ab}\,T_{ab} \qquad (12.4,2)$$

Die T-Matrix läßt sich aus folgender Definition berechnen:

$$R_{ab} = -(2\pi i)\,\delta^4(K_{a_1}+K_{a_2}-K_{b_1}-K_{b_2})\;T_{ab} \qquad (12.4,3)$$

Es ergibt sich mit $\kappa_1=\kappa_2$ und $\mu_1=\mu_2$ der folgende Ausdruck

$$T^{*\,nn}_{ab\;nn} = (2\pi)^{10}\,3^{-1}\,L^2\,w_{\kappa_1}w_{\kappa_2}C_1C_2[C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}+(\gamma_5\,C)_{\alpha\beta}\,(\gamma_5\,C)_{\gamma\delta}]\,\frac{1}{(\kappa^2-\mu^2)^4}$$

$$\sum_{\substack{S_{a_1}S_{a_2} \\ S_{b_1}S_{b_2}}} \Bigg\{ \frac{[\;\bar{u}_{\alpha_2}\,\bar{u}_{\alpha_1}\;][\,(\not{K}_{b_2}+\mu)\beta\,]^T_{\beta\alpha_1}\,)^2}{w_{\kappa_2}} - \frac{[\;\bar{u}_{\alpha_1}\,\bar{u}_{\alpha_2}\;][\,(\not{K}_{b_1}+\mu)\beta\,]^T_{\beta\alpha_2}\,)^2}{w_{\kappa_1}} \Bigg\}$$

$$u_\delta(K_{a_1})\;u_\gamma(K_{a_2})\;\;M(a,b) \qquad (12.4,4)$$

Hierbei wurde die Feynman-Normierung bezüglich der Diracspinoren

$$u_\alpha^*(K_b)\ (\not{K}_b)_{\alpha\beta} = \kappa\ u_\beta^*(K_b)$$
$$(\not{K}_b)_{\alpha\beta}\ u_\beta(K_b) = -\kappa\ u_\alpha(K_b) \qquad (12.4,5)$$
$$u_\alpha^*(K_b)\ \beta_{\alpha\gamma} = \bar{u}_\gamma(K_b)$$

benutzt.

Das Quadrat der T-Matrix läßt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$|T_{ab\ nn}^{\ nn}|^2 = \sum_{\substack{s_{a_1} s_{a_2} \\ s_{b_1} s_{b_2}}}^{\text{unpolarisiert}} (2\pi)^{2\varepsilon}\ \frac{r}{9}\ C_1^2 C_2^2 \frac{L^4}{4(\kappa^2+\mu^2)^8}\ w_{\kappa_1}^2\ w_{\kappa_2}^2$$

$$[C_{\alpha\beta}\ C_{\gamma\delta} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta}\ (\gamma_5 C)_{\gamma\delta}]\,[C^*_{\alpha'\beta'}\ C^*_{\gamma'\delta'} + (\gamma_5 C)^*_{\alpha'\beta'}\ (\gamma_5 C)^*_{\gamma'\delta'}]$$
$$u_\delta(K_{a_1})\ u^*_{\delta'}(K_{a_1'})\ u_\gamma(K_{a_2})\ u^*_{\gamma'}(K_{a_2'})\ M^2(a,b)$$

$$\left\{ \frac{[\ \bar{u}_{\alpha_2}\bar{u}_{\alpha_1}][(\ (K_{b_2}+\mu)\beta)^T_{\beta u_1}\ )]^2}{w_{\kappa_2}} \right.$$
$$\left. - \frac{[\ \bar{u}_{\alpha_1}\bar{u}_{\alpha_2}][(\ (K_{b_1}+\mu)\beta)^T_{\beta\alpha_2}\ ]^2}{w_{\kappa_1}} \right\}$$
$$\left\{ \frac{[\ \overline{u^*_{\alpha_2}}\ \overline{u^*_{\alpha_1}}][(\ (K_{b_2}+\mu)\beta)^\dagger_{\beta'\alpha_1'}\ ]^2}{w_{\kappa_2}} \right.$$
$$\left. - \frac{[\ \overline{u^*_{\alpha_1}}\ \overline{u^*_{\alpha_2}}][(\ (K_{b_1}+\mu)\beta)^\dagger_{\beta'\alpha_2'}\ ]^2}{w_{\kappa_1}} \right\}$$

(12.4,6)

Nach Multiplikation der einzelnen Terme in /12.4,6/ erhält man:

$$|T_{ab\,nn}^{\,nn}|^2_{\text{unpolarisiert}} = \sum_{\substack{S' S' \\ a_1 a_2 \\ S S \\ b_1 b_2}} (2\pi)^{20} C_1^2 C_2^2 \; w_{\kappa_1}^2 \; w_{\kappa_2}^2 \; \frac{L^4 \; M^2(a,b)}{9 \; 4 \; 16 \; (\kappa^2-\mu^2)^8 \; \kappa^4}$$

$$[\, C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 C)_{\gamma\delta} \,] \; [\, C^T_{\alpha'\beta'} C^T_{\gamma'\delta'} + (\gamma_5 C)^T_{\alpha'\beta'} (\gamma_5 C)^T_{\gamma'\delta'} \,]$$

$$[\,(K_{a_1}+\kappa)\beta\,]_{\delta\delta'} \, [\,(K_{a_2}+\kappa)\beta\,]_{\gamma\gamma'}$$

$$\{\, [(K_{b_1}+\kappa)\beta]^T_{\alpha\alpha'} [(K_{b_2}+\kappa)\beta]^T_{\beta\beta'} [\,[(K_{b_2}+\mu)\beta]^T_{\beta\alpha_1}]^2 [(K_{b_2}+\mu)\beta]^T_{\beta'\alpha_1'}\,]^2$$

$$+ [(K_{b_2}+\kappa)\beta]^T_{\alpha\alpha'} [(K_{b_1}+\kappa)\beta]^T_{\beta\beta'} [\,[(K_{b_1}+\mu)\beta]^T_{\beta\alpha_2}]^2 [(K_{b_1}+\mu)\beta]^T_{\beta\alpha_2'}\,]^2$$

$$+ [(K_{b_2}+\kappa)\beta]^T_{\alpha\alpha'} [(K_{b_1}+\kappa)\beta]^T_{\beta\beta'} [\,[(K_{b_1}+\mu)\beta]^T_{\beta\alpha_2}]^2 [(K_{b_2}+\mu)\beta]^T_{\beta\alpha_1'}\,]^2$$

$$+ [(K_{b_1}+\kappa)\beta]^T_{\alpha\alpha'} [(K_{b_2}+\kappa)\beta]^T_{\beta\beta'} [\,[(K_{b_2}+\mu)\beta]^T_{\beta\alpha_1}]^2 [(K_{b_1}+\mu)\beta]^T_{\beta'\alpha_2'}\,]^2 \,\} \qquad (12.4,6')$$

$$= (2\pi)^{20} C_1^2 C_2^2 \; w_{\kappa_1}^2 \; w_{\kappa_2}^2 \; \frac{4 \; L^4 \; M^2(a,b)}{9 \; 4 \; 16 \; (\kappa^2-\mu^2)^8 \; \kappa^4}$$

$$4 \Bigg[+ \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}-\kappa)]\,\mathrm{Tr}[(K_{b_1}+\kappa)(K_{b_2}-\kappa)(K_{b_2}+\mu)(K_{b_2}+\mu)(K_{b_2}+\mu)(K_{b_2}+\mu)]}{w_{\kappa_2}^2}$$

$$+ \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}+\kappa)]\,\mathrm{Tr}[(K_{b_1}+\kappa)(K_{b_2}+\kappa)(K_{b_2}+\mu)(K_{b_2}+\mu)(K_{b_2}+\mu)(K_{b_2}+\mu)]}{w_{\kappa_2}^2}$$

$$+ \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}-\kappa)]\,\mathrm{Tr}[(K_{b_2}+\kappa)(K_{b_1}-\kappa)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)]}{w_{\kappa_1}^2}$$

$$+ \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}+\kappa)]\,\mathrm{Tr}[(K_{b_2}+\kappa)(K_{b_1}+\kappa)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)]}{w_{\kappa_1}^2}$$

$$+ \Bigg[+ \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}-\kappa)(K_{b_1}+\kappa)(K_{b_2}-\kappa)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)]}{w_{\kappa_1} \; w_{\kappa_2}}$$

$$- \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}+\kappa)(K_{b_1}-\kappa)(K_{b_2}+\kappa)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)]}{w_{\kappa_1} \; w_{\kappa_2}}$$

$$- \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}-\kappa)(K_{b_1}-\kappa)(K_{b_2}-\kappa)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)]}{w_{\kappa_1} \; w_{\kappa_2}}$$

$$+ \frac{\mathrm{Tr}[(K_{a_1}+\kappa)(K_{a_2}+\kappa)(K_{b_1}+\kappa)(K_{b_2}+\kappa)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)(K_{b_1}+\mu)]}{w_{\kappa_1} \; w_{\kappa_2}}$$

$$+ \text{die letzten vier Terme mit } K_{b_1} \leftrightarrow K_{b_2} \text{ vertauscht} \Bigg] \qquad (12.4,6'')$$

Für /12.4,6''/erhält man schließlich:

$$|T_{ab\ nn}^{unpol}|^2 = \frac{\frac{L^6}{(2\pi)^6}\ 16\ M^2(a,b)}{(2\pi)^{16}\ (\kappa+\mu)^8\ 9}\ [\ \frac{64(\kappa^2+\mu^2)^2}{w_\kappa^2}\ (K_a K_{a_2} K_b K_{b_2} + \kappa^4)\ + \frac{32(\kappa^2+\mu^2)^2}{w_\kappa\ w_\kappa}(-\kappa^2 K_a K_b + \kappa^4)\ ]$$

(12.4,7)

Drückt man $T_{ab}{}^2$ durch Mandelstram-Variablen aus, so erhält man für /12.4,7/:

$$= \frac{\frac{L^6}{(2\pi)^6}\ 16\ M^2(a,b)\ (\kappa^2+\mu^2)^2\ 32}{(2\pi)^{16}\ (\kappa+\mu)^8\ 9}\ \{\ \frac{8\ ((\frac{s-2\kappa^2}{2})^2+\kappa^4)}{s} + \frac{\kappa^2(\frac{t-2\kappa^2}{2}+\kappa^2)\ 4}{s}\ \}$$

(12.4,8)

$$= \frac{\frac{L^6}{(2\pi)^6}\ 16\ M^2(a,b)\ (\kappa^2+\mu^2)^2\ 64}{(2\pi)^{16}\ (\kappa+\mu)^8\ 9}\ \frac{(s-2\kappa^2)^2 + 4\kappa^4 + \kappa^2 t}{s}$$

(12.4,9)

Daraus folgt für den partiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\theta(\sqrt{s}-2\kappa)\ 32\ M^2(a,b)\ (\kappa^2+\mu^2)^2\ 64\ \frac{L^6}{(2\pi)^6}}{(2\pi)^5\ (\kappa+\mu)^8\ 9}\ \frac{(s-2\kappa^2)^2 + 4\kappa^4 + t\kappa^2}{s^2\ (s-4\kappa^2)}$$

(12.4,10)

und der total elastische Wirkungsquerschnitt errechnet sich zu:

$$\sigma^{elastisch}(s) = \int_{-\frac{1}{s}[(s-2\kappa^2)^2-4\kappa^4]}^{0} \frac{d\sigma}{dt}(s,t)\ dt$$

$$= A\ \frac{\theta(\sqrt{s}-2\kappa)\ 32\ M^2(a,b)\ (\kappa^2+\mu^2)^2\ 64\ L^6}{(2\pi)^{13}\ (\kappa+\mu)^8\ 9}\ (\ 1 - 3.5\ \frac{\kappa^2}{s} + 6\ \frac{\kappa^4}{s^2}\ )$$

wobei A den Wert 1/2 für gleiche Teilchen hat
bzw. 1 für nicht-gleiche Teilchen.

Neben der Matrix $R_{ab}^{nn}{}_{nn}$ gibt es durch die Erkenntnis bedingt, daß die Geister diesselbe Masse haben können wie die Nukleonen, weitere Matrizen, die berücksichtigt werden müssen:

$$\begin{array}{llll|ll}
R_{ab}^{nn}{}_{nn}; & R_{ab}^{nn}{}_{ng}; & R_{ab}^{nn}{}_{gg}; & & R_{ab}^{nn}{}_{nd}; & R_{ab}^{nn}{}_{gd}; & R_{ab}^{nn}{}_{dd} & \text{und} \\
R_{ab}^{ng}{}_{nn}; & R_{ab}^{ng}{}_{ng}; & R_{ab}^{ng}{}_{gg}; & & R_{ab}^{ng}{}_{nd}; & R_{ab}^{ng}{}_{gd}; & R_{ab}^{ng}{}_{dd} & \text{und} \\
R_{ab}^{gg}{}_{nn}; & R_{ab}^{gg}{}_{ng}; & R_{ab}^{gg}{}_{gg}; & & R_{ab}^{gg}{}_{nd}; & R_{ab}^{gg}{}_{gd}; & R_{ab}^{gg}{}_{dd} & \text{und} \\
R_{ab}^{gd}{}_{nn}; & R_{ab}^{gd}{}_{ng}; & R_{ab}^{gd}{}_{gg}; & & R_{ab}^{gd}{}_{nd}; & R_{ab}^{gd}{}_{gd}; & R_{ab}^{gd}{}_{dd} & \text{und} \\
R_{ab}^{nd}{}_{nn}; & R_{ab}^{nd}{}_{ng}; & R_{ab}^{nd}{}_{gg}; & & R_{ab}^{nd}{}_{nd}; & R_{ab}^{nd}{}_{gd}; & R_{ab}^{nd}{}_{dd} & \text{sowie} \\
R_{ab}^{dd}{}_{nn}; & R_{ab}^{dd}{}_{ng}; & R_{ab}^{dd}{}_{gg}; & & R_{ab}^{dd}{}_{nd}; & R_{ab}^{dd}{}_{gd}; & R_{ab}^{dd}{}_{dd} &
\end{array}$$

(12.4,12)

Andere Matrizen als die, die in /12.4,12/ besonders gekennzeichnet worden sind, sind bei der besonderen Form der F-Funktion, der G-Funktion sowie unter Berücksichtigung dieses Graphen und der f-Funktionen nicht möglich. Gerade das nicht-Auftreten der Dipolgeister d soll durch die Unitarisierungsprozedur bewirkt werden. Insofern wird es genügen, wenn wir von einem nicht-Geist-Sektor ausgehen - die oben gekennzeichneten 9 Matrizen zu betrachten. Es sei darauf higewiesen, daß bei einer eventuellen Identifikation der Geister mit den Quarks die anderen Matrizen bei einer genaueren Analyse der Quark-Quark-Wechselwirkung ebenfalls betrachtet werden müßten.

$$R_{ab}^{*ng}{}_{nn} = (2\pi i)\,\frac{\delta(K_a^2+K_{a_2}^2+\kappa_1^2+\kappa_2^2)}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2}\,\tfrac{1}{4}L^2\,V_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(2\pi)^8\int d^4q_1 d^4q_2\; f_n(q_1^2)\; f_n(q_2^2)\;\blacksquare$$

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^P \sum_{\lambda_1'\lambda_2'}(-1)^P\; u_{a_1}^*(q_1)\, u_{a_2}^*(q_2)\, u_\delta(p_1)\, u_\gamma(p_2)\;\blacksquare$$

$$\int dp_1\, dp_2\;\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\;\delta^4(p_1-K_{a_{\lambda_1'}})\;\delta^4(p_2-K_{a_{\lambda_2'}})\;\blacksquare$$

$$\delta^4(q_1-K_{b_{\lambda_1}})\;\delta^4(q_2-\pi_{b_{\lambda_2}})\;\blacksquare$$

$$C_1C_2\;\frac{(\lambda_2'\not{q}_1\beta)_{\alpha_1\alpha}\left[(\lambda_2'(-\not{q}_2+i\kappa)\beta)\;(\lambda_2'(-\not{q}_2+i\mu)\beta)^2\right]_{\beta\alpha_2}}{q_1^2\qquad (q_2^2-\kappa^2+i\varepsilon)\;(q_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

(12.4,13)

Nach Funktionalintegration über den dritten Term im Nenner und unter Beachtung der möglichen Randbedingung $K_a^\circ - w_\mu = w_k$ erhält man schließlich für diese Matrix :

$$R^{*\,ng}_{ab\,nn} = i(2\pi)^{14} \quad L^2 V_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^{P_\lambda} \sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^{P_\lambda} \frac{\delta(K^2_{a_1}+K^2_{a_2}+\kappa^2_1+\kappa^2_2)}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2} \cdot \delta(K^2_{b_{\lambda_1}}-K_1^2)\,\delta(\Pi^2_{a_1}-\mu_1^2)$$

$$u^*_{\alpha_1}(K_{b_{\lambda_1}})\, u^*_{\alpha_2}(\Pi_{b_{\lambda_2}})\, u_\delta(K_{a_{\lambda_1}})\, u_\gamma(K_{a_{\lambda_2}})$$

$$\delta^3(K_{a_{\lambda'}} - K_{b_\lambda} - \Pi_{b_\lambda})\; w_\kappa\, w_\mu \quad \varsigma_1\varsigma_2$$

$$\left\{ \frac{-(\lambda_2'((w_\kappa)\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})\beta\}_{\alpha_1\alpha}[(\lambda_2'(-(w_\mu\beta-\bar{\Pi}_{b_{\lambda_2}})+i\kappa)\beta)\,(\lambda_2'(-(w_\mu\beta-\bar{\Pi}_{b_\lambda})+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_2}}{w_\mu^2\;[(w_\kappa)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_1}})^2]\;[\kappa_2^2-\mu_2^2]} \right.$$

(12.4,14)

Analog läßt sich $R_{ab\,ng}^{\;\;ng}$ berechnen:.

$$R^{*\,ng}_{ab\,ng} = (2\pi i) \qquad 4\, L^2 V_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(2\pi)^{-8} \int d^4q_1 d^4q_2\, f_n(q_1^0)\, f_g(q_2^0)\, \otimes$$

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^P \sum_{\lambda_1'\lambda_2'}(-1)^P \; u^*_{\alpha_1}(q_1)\, u^*_{\alpha_2}(q_2)\, u_\delta(p_1)\, u_\gamma(p_2) \;\otimes$$

$$\int dp_1\, dp_2\; \delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\; \delta^4(p_1-K_{a_{\lambda_1'}})\; \delta^4(p_2-\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \;\otimes$$

$$-\quad \delta^3(q_1-K_{b_{\lambda_1}})\; \delta^3(q_2-\Pi_{b_{\lambda_2}}) \;\otimes\; \delta[(K^2_{a_1}+\Pi^2_{a_1}-\kappa_1^2-\kappa_1^2)\cdot(K^2_{a_1}+\Pi^2_{a_1}-\mu_1^2-\mu_1^2)^2]$$

$$\varsigma_1\varsigma_2 \quad \frac{(\lambda_2' \not{q}_1\,\beta)_{\alpha_1\alpha}[(\lambda_2'(-\not{q}_2+i\kappa)\beta)\;(\lambda_2'(-\not{q}_2+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_2}}{q_1^{\,2}\qquad (q_2^{\,2}-\kappa^2+i\epsilon)\;(q_2^2-\mu^2+i\epsilon)^2}$$

(12.4,15)

$$R^{*\,ng}_{ab\,ng} = i(2\pi)^{14} \quad L^2 V_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^{P_\lambda} \sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^{P_\lambda}$$

$$u^*_{\alpha_1}(K_{b_{\lambda_1}})\, u^*_{\alpha_2}(\Pi_{b_{\lambda_2}})\, u_\delta(K_{a_{\lambda_1}})\, u_\gamma(\Pi_{a_{\lambda_2}})$$

$$\delta[(K^2_{a_1}+\Pi^2_{a_1}-\kappa_1^2-\kappa_1^2)(K^2_{a_1}+\Pi^2_{a_1}-\mu_1^2-\mu_1^2)^2] \quad \varsigma_1\varsigma_2 \quad \delta^3(K_{b_{\lambda_1}}+\Pi_{b_{\lambda_2}}-K_{a_{\lambda_1}}-\Pi_{a_{\lambda_2}})\; w_\kappa w_\mu$$

$$\left\{ \frac{-(\lambda_2'((w_\kappa)\beta-\bar{K}_{b_\lambda})\beta\}_{\alpha_1\alpha}[(\lambda_2'(-(w_\mu\beta-\bar{\Pi}_{b_{\lambda_2}})+i\kappa)\beta)\,(\lambda_2'(-(w_\mu\beta-\bar{\Pi}_{b_\lambda})+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_2}}{[(w_\kappa)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_1}})^2]\;[\kappa_2^2-\mu_2^2]\cdot W_\mu^2} \right.$$

(12.4,16)

$$R^{*\ nn}_{ab\ ng} = (2\pi i)^{\qquad} \quad 2L^3\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, (2\pi)^{4\delta} \int d^4q_1 d^4q_2\, f_n(q_1^\circ)\, f_n(q_2^\circ) \boxtimes$$

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2} (-1)^P \sum_{\lambda_1'\lambda_2'} (-1)^P \quad u^*_{a_1}(K_{b_{\lambda_1}})\, u^*_{a_2}(K_{b_{\lambda_2}})\, u\,(K_{a_{\lambda_1'}})\, u\,(\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \boxtimes$$

$$\int dp_1\, dp_2\, \delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\, \delta^4(p_1-K_{a_{\lambda_1'}})\, \delta^4(p_2-\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \boxtimes$$

$$\delta^3(q_1-K_{b_{\lambda_1}})\, \delta^3(q_2-K_{b_{\lambda_2}}) \boxtimes \delta\left[(K_{a_1}^2+\Pi_{a_1}^2-\varkappa_1^2-\varkappa_1^2)(K_{a_2}^2+\Pi_{a_1}^2-\mu_1^2-\mu_1^2)^2\right]$$

$$C_1C_2 \Big\{ \frac{(\lambda_2' \not{q}_1 \beta)_{\alpha\alpha} \left[\beta_2' \left(-\not{q}_2+i\varkappa\right)\beta\right) \left(\lambda_2' \left(-\not{q}_2+i\mu\right)\beta\right)^2 \right]_{\beta\alpha_2}}{q_1^2 \qquad (q_2^2-\varkappa^2+i\varepsilon)\,(q_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}$$

$$- \frac{(\lambda_2 \not{q}_2 \beta)_{\alpha\alpha} \left[\left(\lambda_2' \left(-\not{q}_1+i\varkappa\right)\beta\right) \left(\lambda_2' \left(-\not{q}_1+i\mu\right)\beta\right)^2 \right]_{\beta\alpha_1}}{q_2^2 \qquad (q_1^2-\varkappa^2+i\varepsilon)\,(q_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2} \Big\}$$

$$= i(2\pi)^{4\delta}\, 2L^3\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda_1\lambda_2}^{P_\lambda} (-1)^{P_\lambda} \sum_{\lambda_1\lambda_2}^{P_\lambda}$$

$$u^*_{a_1}(K_{b_{\lambda_1}})\, u^*_{a_2}(K_{b_{\lambda_2}})\, u_\delta(K_{a_{\lambda_1}})\, u_\gamma(\Pi_{a_{\lambda_2}})$$

$$\delta\left[(K_{a_1}^2+\Pi_{a_1}^2-\varkappa_1^2-\varkappa_1^2)(K_{a_2}^2+\Pi_{a_1}^2-\mu_1^2-\mu_1^2)^2\right]\; C_1C_2\; \delta^3(K_b-K_{a_{\lambda_1}}-\Pi_{a_{\lambda_2}})$$

$$\Bigg\{ \frac{w_\kappa^2\, (\lambda_2'((\quad w_\kappa \quad)\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})\beta)_{\alpha\alpha} \left[(\lambda_2'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\varkappa)\beta)(\lambda_2'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\mu)\beta)^2\right]_{\beta\alpha}}{2\, w_\kappa \left[(\quad w_\kappa \quad)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_1}})^2\right]\left[\kappa_2^2-\mu_2^2\right]^2}$$

$$- \frac{w_\kappa^2\, (\lambda_2'((\quad w_\kappa \quad)\beta-\bar{K}_b)\beta_{\alpha_2\alpha} \left[(\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})+i\varkappa)\beta)(\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\mu)\beta)^2\right]_{\beta\alpha}}{2\, w_\kappa \left[(\quad w_\kappa \quad)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_2}})^2\right]\left[\kappa_1^2-\mu_1^2\right]^2} \Bigg\}$$

(12.4,17)

$$
{}^{nn}_{ab\ gg} = (2\pi i)^{} \; 2L^3 \; V_{\alpha\beta\gamma\delta} \; (2\pi)^{4\vartheta} \int d^4q_1 d^4q_2 \; f_n(q_1^2) \; f_n(q_2^2) \; \boxtimes
$$

$$
\sum_{\lambda_1\lambda_2} (-1)^P \sum_{\lambda_1'\lambda_2'} (-1)^P \; u^*_{\alpha_1}(K_{b_{\lambda_1}}) \; u^*_{\alpha_2}(K_{b_{\lambda_2}}) \; u\,(\Pi_{a_{\lambda_1'}}) \; u\,(\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \; \boxtimes
$$

$$
\int dp_1 \; dp_2 \; \delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2) \; \delta^4(p_1-\Pi_{a_{\lambda_1'}}) \; \delta^4(p_2-\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \; \boxtimes
$$

$$
\delta^3(q_1-K_{b_{\lambda_1}}) \; \delta^3(q_2-K_{b_{\lambda_2}}) \; \boxtimes \; \delta\left[(\Pi_{a_1}^2+\Pi_{a_2}^2-\kappa^2-\kappa^2)(\Pi_{a_1}^2+\Pi_{a_2}^2-\mu^2-\mu^2)^2\right]
$$

$$
C_1C_2 \Big\{ \frac{(\lambda_2' \alpha_1 \beta)_{\alpha_1\alpha} [\lambda_2' (-\alpha_2+i\kappa)\beta) \; (\lambda_2' (-\alpha_2+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_2}}{q_1^2 \qquad (q_2^2-\kappa^2+i\varepsilon) \; (q_2^2-\mu^2+i\varepsilon)^2}
$$

$$
- \frac{(\lambda_2' \alpha_2 \beta)_{\alpha_2\alpha} [(\lambda_2' (-\alpha_1+i\kappa)\beta) \; (\lambda_2' (-\alpha_1+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_1}}{q_2^2 \qquad (q_1^2-\kappa^2+i\varepsilon) \; (q_1^2-\mu^2+i\varepsilon)^2} \Big\}
$$

$$
= i(2\pi)^{4\vartheta} \; 2L^3 \; V_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda_1\lambda_2}^{P_\lambda} (-1) \sum_{\lambda_1\lambda_2}^{P_\lambda}
$$

$$
u^*_{\alpha_1}(K_{b_{\lambda_1}}) \; u^*_{\alpha_2}(K_{b_{\lambda_2}}) \; u_\delta(\Pi_{a_{\lambda_1}}) \; u_\gamma(\Pi_{a_{\lambda_2}})
$$

$$
\delta^3(\Pi_{a_{\lambda'}} - K_{b_\lambda}) \qquad C_1C_2 \; \delta\left[(\Pi_{a_1}^2+\Pi_{a_2}^2-\kappa^2-\kappa^2)(\Pi_{a_1}^2+\Pi_{a_2}^2-\mu^2-\mu^2)^2\right]
$$

$$
\Bigg\{ \frac{w_{\kappa_2}^2 \; (\lambda_2'((\quad w_\kappa \quad)\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})\beta)_{\alpha_1\alpha} [(\lambda_2'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\kappa)\beta) \; (\lambda_2'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_2}}{2\, w_{\kappa_2} \; [(\quad w_\kappa \quad)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_1}})^2] \; [\kappa_2^2-\mu_2^2]^2}
$$

$$
- \frac{w_{\kappa_2}^2 \; (\lambda_2'((\quad w_\kappa \quad)\beta-\bar{K}_b)\beta)_{\alpha_2\alpha} [(\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})+i\kappa)\beta) \; (\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})+i\mu)\beta)^2]_{\beta\alpha_1}}{2\, w_{\kappa_1} \; [(\quad w_\kappa \quad)^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_2}})^2] \; [\kappa_1^2-\mu_1^2]^2} \Bigg\}
$$

(12.4,18)

$$R^{*\,ng}_{ab\,gg} = (2\pi i)^{2L^2} V_{\alpha\beta\gamma\delta} (2\pi)^{40} \int d^4q_1 d^4q_2 \, f_n(q_1^2) \, f_n(q_2^2) \otimes$$

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2} (-1)^P \sum_{\lambda_1'\lambda_2'} (-1)^P \, u^*_{a_1}(K_{b_{\lambda_1}}) \, u^*_{a_2}(\Pi_{b_{\lambda_2}}) \, u(\Pi_{a_{\lambda_1'}}) \, u(\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \otimes$$

$$\int dp_1 \, dp_2 \; \delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2) \; \delta^4(p_1-\Pi_{a_{\lambda_1'}}) \; \delta^4(p_2-\Pi_{a_{\lambda_2'}}) \otimes$$

$$\delta^3(q_1-K_{b_{\lambda_1}}) \; \delta^3(q_2-\Pi_{b_{\lambda_2}}) \otimes \delta\left[(\Pi a_1^2+\Pi a_2^2-x_1^2-x_2^2)(\Pi a_1^2+\Pi a_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2\right]$$

$$C_1C_2 \Big\{ \frac{(\lambda_2' \not{q}_1 \beta)_{\alpha_1\alpha} \left[(\lambda_2' (-\not{q}_2 + i\kappa)\beta) \; (\lambda_2' (-\not{q}_2 + i\mu)\beta)^2 \right]_{\beta\alpha_2}}{q_1^2 \qquad (q_2^2-\kappa^2+i\epsilon) \; (q_2^2-\mu^2+i\epsilon)^2}$$

$$- \frac{(\lambda_2 \not{q}_2 \beta)_{\alpha_2\alpha} \left[(\lambda_2' (-\not{q}_1 + i\kappa)\beta) \; (\lambda_2' (-\not{q}_1 + i\mu)\beta)^2 \right]_{\beta\alpha_1}}{q_2^2 \qquad (q_1^2-\kappa^2+i\epsilon) \; (q_1^2-\mu^2+i\epsilon)^2} \Big\}$$

$$= i(2\pi)^{44} L^2 V_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-1)^{P_\lambda} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-1)^{P_\lambda}$$

$$u^*_{a_1}(K_{b_{\lambda_1}}) \, u^*_{a_2}(\Pi_{b_{\lambda_2}}) \, u_\delta(\Pi_{a_{\lambda_1}}) \, u_\gamma(\Pi_{a_{\lambda_2}})$$

$$\delta\left[(\Pi a_1^2+\Pi a_2^2-x_1^2-x_2^2)(\Pi a_1^2+\Pi a_2^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2\right] \; C_1C_2 \; \delta^3(K_{b_{\lambda_1}}+\Pi_{b_{\lambda_2}}-\Pi_{a_{\lambda_1}}-\Pi_{a_{\lambda_2}}) \; W_\kappa \, W_\mu$$

$$\Big\{ - \frac{(\lambda_2' ((\quad w_\kappa \quad)\beta - \overline{K}_{b_{\lambda_1}})\beta)_{\alpha_1\alpha} \left[(\lambda_2' (-(w_\mu \beta - \overline{\Pi}_{b_{\lambda_2}}) + i\kappa)\beta) (\lambda_2' (-(w_\mu \beta - \overline{\Pi}_{b_{\lambda_2}}) + i\mu)\beta \right.}{w_\mu^2 \left[(\quad w_\kappa \quad)^2 - (\overline{K}_{b_{\lambda_1}})^2 \right] \left[\kappa_2^2 - \mu_2^2 \right]}$$

(12.4,19)

12.4.1 Unitarisierung des ersten Graphen in der Nukleon-Nukleon-Streuung

Für den neuen Ansatz /10.7,1/ erhält man unter Anwendung der Bedingungen /10.2,1/:

$$
\begin{aligned}
{}^{f}\!<ng|nn>^{+}_{ph} - {}^{f}\!<ng|nn>^{+} &+ \int d^3k_1\, d^3\Pi_2 \quad C(n_1n_2|n(k_1)g(\Pi_2)\ {}^{f}\!<ng|n(k_1)\ g(\Pi_2)>^{+} \\
&+ \int d^3\Pi_1\, d^3\Pi_2 \quad C(n_1n_2|g(\Pi_1)g(\Pi_2)\ {}^{f}\!<ng|g(\Pi_1)\ g(\Pi_2)>^{+}
\end{aligned}
\qquad (12.4.1,1)
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{f}\!<gg|nn>^{+}_{ph} = {}^{f}\!<gg|nn>^{+} &+ \int d^3k_1\, d^3\Pi_2 \quad C(n_1n_2|n(k_1)g(\Pi_2)\ {}^{f}\!<gg|n(k_1)\ g(\Pi_2)>^{+} \\
&+ \int d^3\Pi_1\, d^3\Pi_2 \quad C(n_1n_2|g(\Pi_1)g(\Pi_2)\ {}^{f}\!<gg|g(\Pi_1)\ g(\Pi_2)>^{+}
\end{aligned}
$$

bzw. die analogen Formeln für den zweiten Teil der Bedingungen /10.2,1/. Für den im vorigen Abschnitt besprochenen Graphen gibt es wie besprochen nur folgende R-Matrix-Möglichkeiten:

$$
R_{ab\ nn}^{\ \ nn}\ ;\ R_{ab\ ng}^{\ \ nn}\ ;\ R_{ab\ gg}^{\ \ nn}\ ;\ R_{ab\ nn}^{\ \ ng}\ ;\ R_{ab\ ng}^{\ \ ng}\ \text{und}\ R_{ab\ gg}^{\ \ ng}\ . \qquad (12.4.1,2)
$$

Diese Auswahl der R-Matrizen ist dadurch bedingt, daß bei der Viererintegration nur eine F-Funktion wirksam wird und die f-Funktionen nur an bestimmten Stellen /9.2,5/ definiert sind. Insofern erhält man für diesen Graphen:

$$
\begin{aligned}
0 &= {}^{f}\!<ng|nn>^{+}_{ph} = {}^{f}\!<ng|nn>^{+} + \int d^3k_1\, d^3\Pi_2\ C(n_1n_2|n(k_1)g(\Pi_2)\,{}^{f}\!<ng|n(k_1)\ g(\Pi_2)>^{+} \\
0 &= {}^{f}\!<gg|nn>^{+}_{ph} = {}^{f}\!<gg|nn>^{+} + \int d^3k_1\, d^3\Pi_2\ C(n_1n_2|n(k_1)g(\Pi_2)\,{}^{f}\!<gg|n(k_1)\ g(\Pi_2)>^{+}
\end{aligned}
\qquad (12.4.1,3)
$$

Wendet man Gleichung /10.7,1/ unter den Nebenbedingungen /10.2,1/ an, so erhält man für $C(n_1 n_2 | n(K_1)\, g(\Pi_2))$ unter Berücksichtigung der in /12.4,12/ aufgelisteten einschränkenden Bedingungen:

$$C_a(n_1 n_2 | n(K_1)\, g(\Pi_2)) = - \frac{2\, w_\mu}{(\kappa^2 - \mu^2)} \left(\delta(K_{b_1} - K_{b_1})\, \delta(\Pi_{b_2} - K_{b_2}) - \delta(K_{b_1} - K_{b_2})\, \delta(\Pi_{b_2} - K_{b} \right. \tag{1.4.1,4}$$

$$C_b(n_1 n_2 | n(K_1)\, g(\Pi_2)) = - \delta(K_{b_1} - K_{b_1})\, \delta(\Pi_{b_2} - \Pi_{b_2})$$

$$\delta_{ab\,ng}^{nn} + R_{ab\,ng}^{nn} = - \iint (C_b\, \delta_{ab\,ng}^{ng} + C_a\, R_{ab\,ng}^{ng}) dK_{b_1}\, d\Pi_{b_2}$$

und analog für die Matrizen $R_{ab\,gg}^{nn}$ und $R_{ab\,gg}^{ng}$.

In Bornscher Näherung gibt es keinen Unterschied zwischen den U und den Ü - Matrizen (1.Näherung der Matrizen 10.2,5 und 6). Deswegen ist $C(n_1 n_2 | n(K_1)\, g(\Pi_2)) = K(n(h_1)\, g(\Pi_2) | n_1 n_2)$ (12.4.1,5)

Die S-Matrix hat dann folgende Form (ebenfalls für Bornsche Näherung):

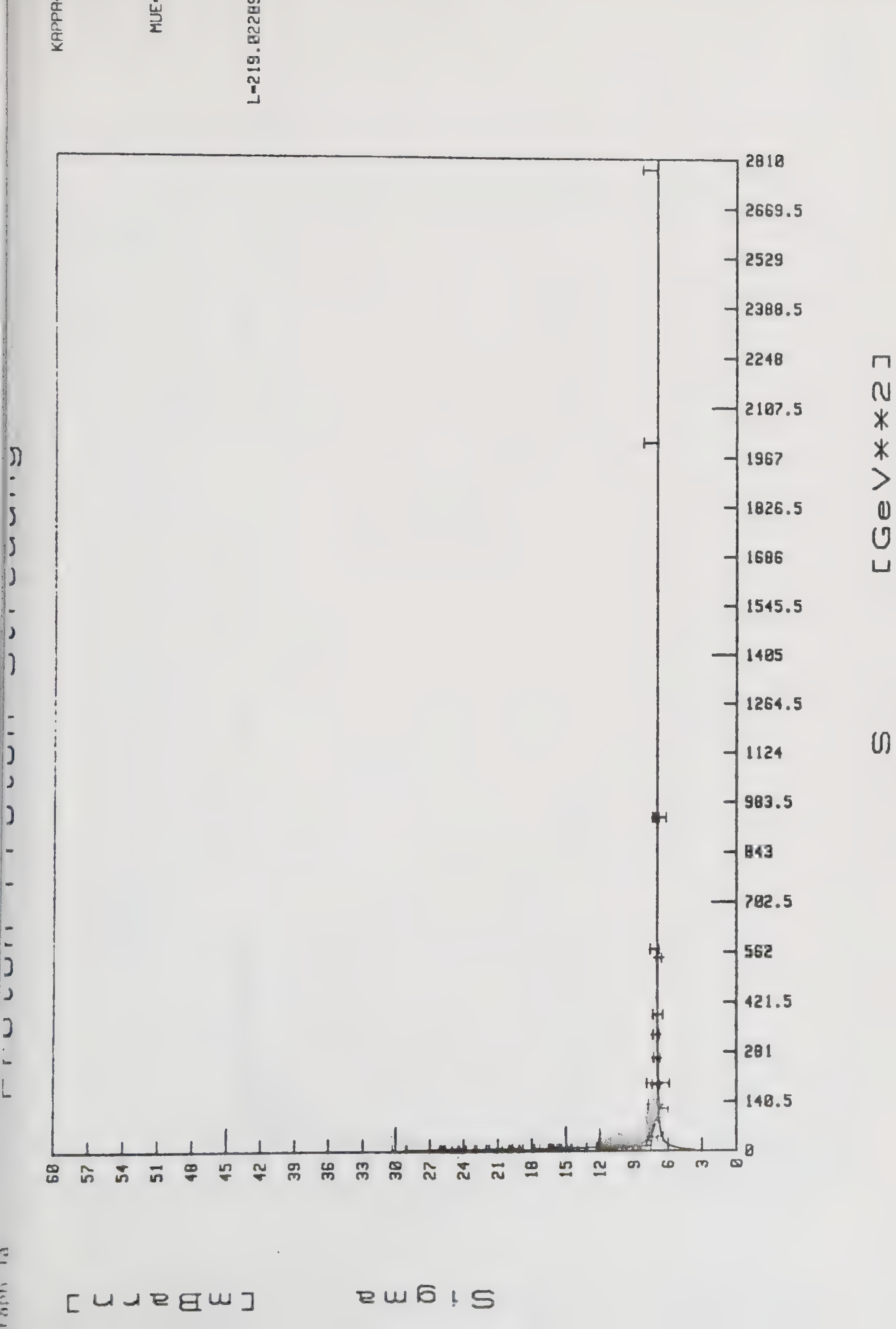
$$S_{ab\,nn_{ph}}^{nn} = S_{ab\,nn}^{nn} + \int C(n_1 n_2 | n(K_1)\, g(\Pi_2))\; S_{ab\,nn}^{ng}\; d\Pi_{b_2}\, dK_{b_1} \tag{12.4.1,6}$$

alle anderen Terme fallen bei dieser Näherung weg.

Für die R-Matrizen ergibt sich dieselbe Gleichung /14.4.1,6/. Setzt man in diese Gleichung /12.4,14/, so folgt daraus:

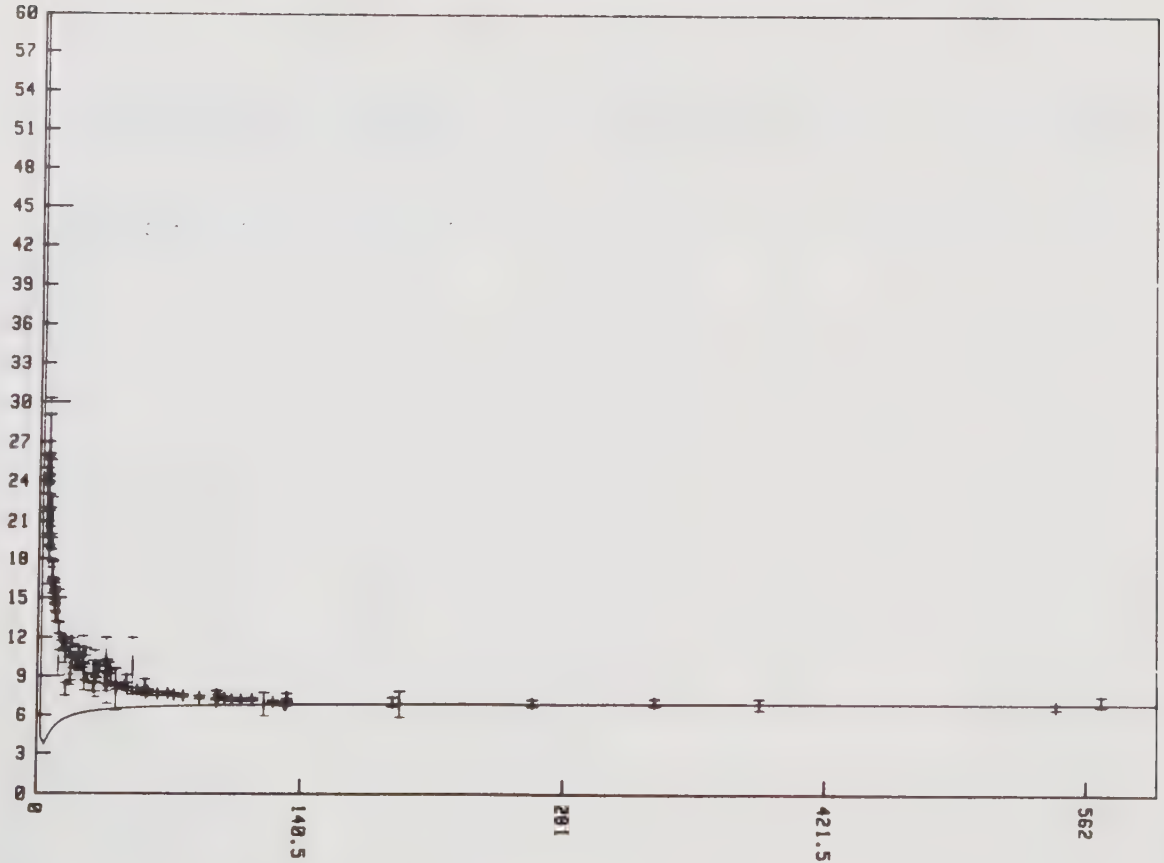
$$R^*_{ab\,nn_{ph}}^{nn} = 2\, R^*_{ab\,nn}^{nn} \tag{12.4.1,7}$$

d.h. man erhält denselben für die T-Matix in /12.4,4/ nur multipliziert mit 2 . Für den totalen Wirkungsquerschnitt in /12.4,11/ erhält man denselben Ausdruck nur multipliziert mit 4. Hierdurch wird die bei den Abbildungen zu verwendende L - Kopplungskonstante auch numerisch identisch mit der vorher berechneten Kopplungskonstanten. Alle benutzten Konstanten wurden hierdurch bestimmt.


L=219.02289951
Sigma [mBarn]
S [GeV**2]
0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 42 45 48 51 54 57 60
0 140.5 281 421.5 562 702.5 843 983.5 1124 1264.5 1405 1545.5 1686 1826.5 1967 2107.5 2248 2388.5 2529 2669.5 2810

raph 1b

Proton-Proton-Streuung



KAPPA=.931

MUE=.317

L=219.022899516

208

Proton-Proton-Streuung
KAPPA=.93
MUE=.729
L=219.02289516
209
Sigma [mBarn]
S [GeV**2]
30
28.5
27
25.5
24
22.5
21
19.5
18
16.5
15
13.5
12
10.5
9
7.5
6
4.5
3
1.5
0
2810
2669.5
2529
2388.5
2248
2107.5
1967
1826.5
1686
1545.5
1405
1264.5
1124
983.5
843
702.5
562
421.5
281
140.5
0

Graph 1d

Proton-Proton-Streuung

KAPPA=.931

MUE=.931

L=219.022899516

[mBarn]

Sigma

30
28.5
27
25.5
24
22.5
21
19.5
18
16.5
15
13.5
12
10.5
9
7.5
6
4.5
3
1.5
0

2810
2669.5
2529
2388.5
2248
2107.5
1967
1826.5
1686
1545.5
1405
1264.5
1124
983.5
843
702.5
562
421.5
281
140.5
0

[GeV**2]

KAPPA=.93

MUE=1.11

L=219.022899510

Proton-Proton-Streuung

Sigma [mBarn]

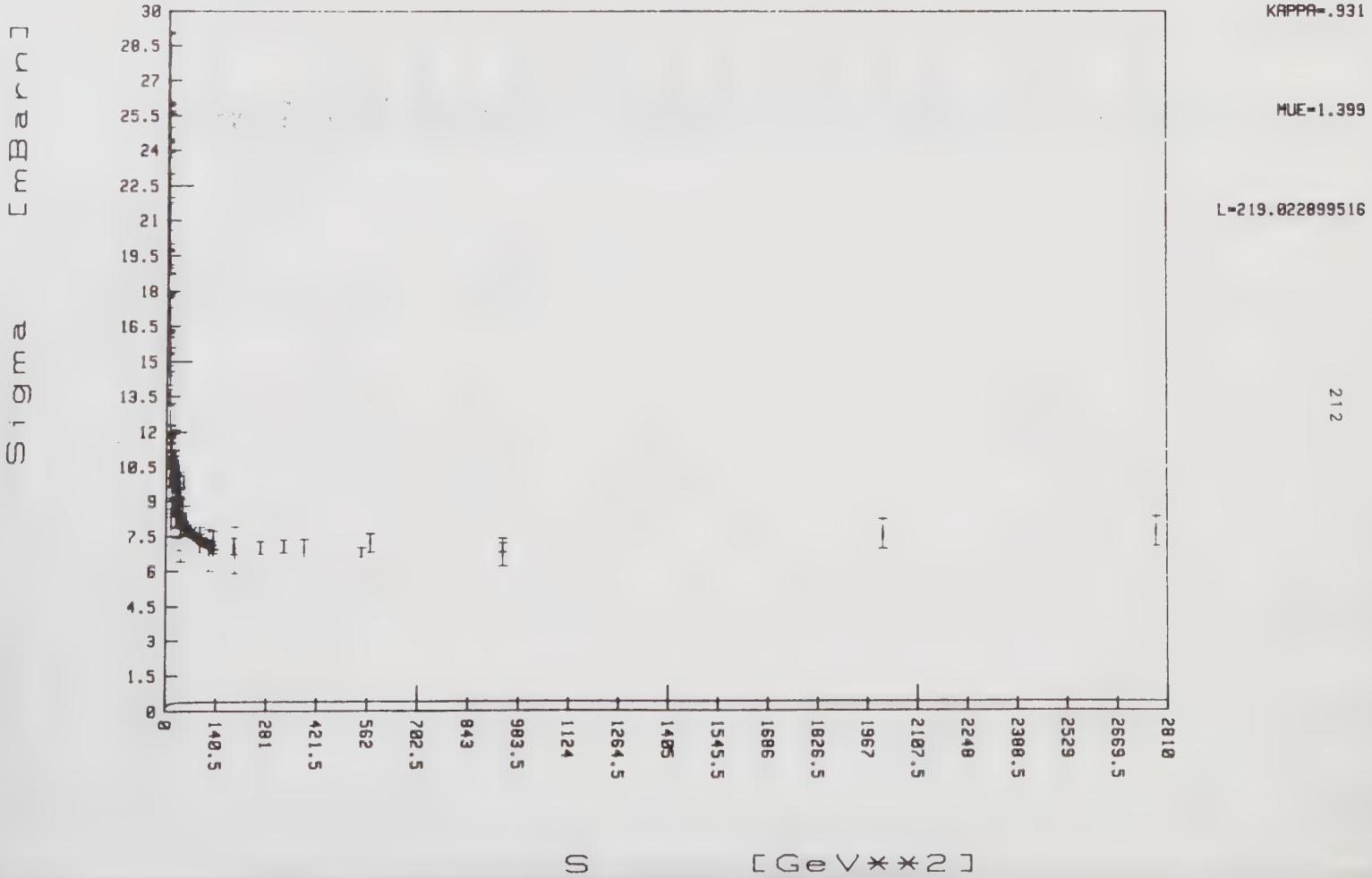
S [GeV**2]

30 28.5 27 25.5 24 22.5 21 19.5 18 16.5 15 13.5 12 10.5 9 7.5 6 4.5 3 1.5 0

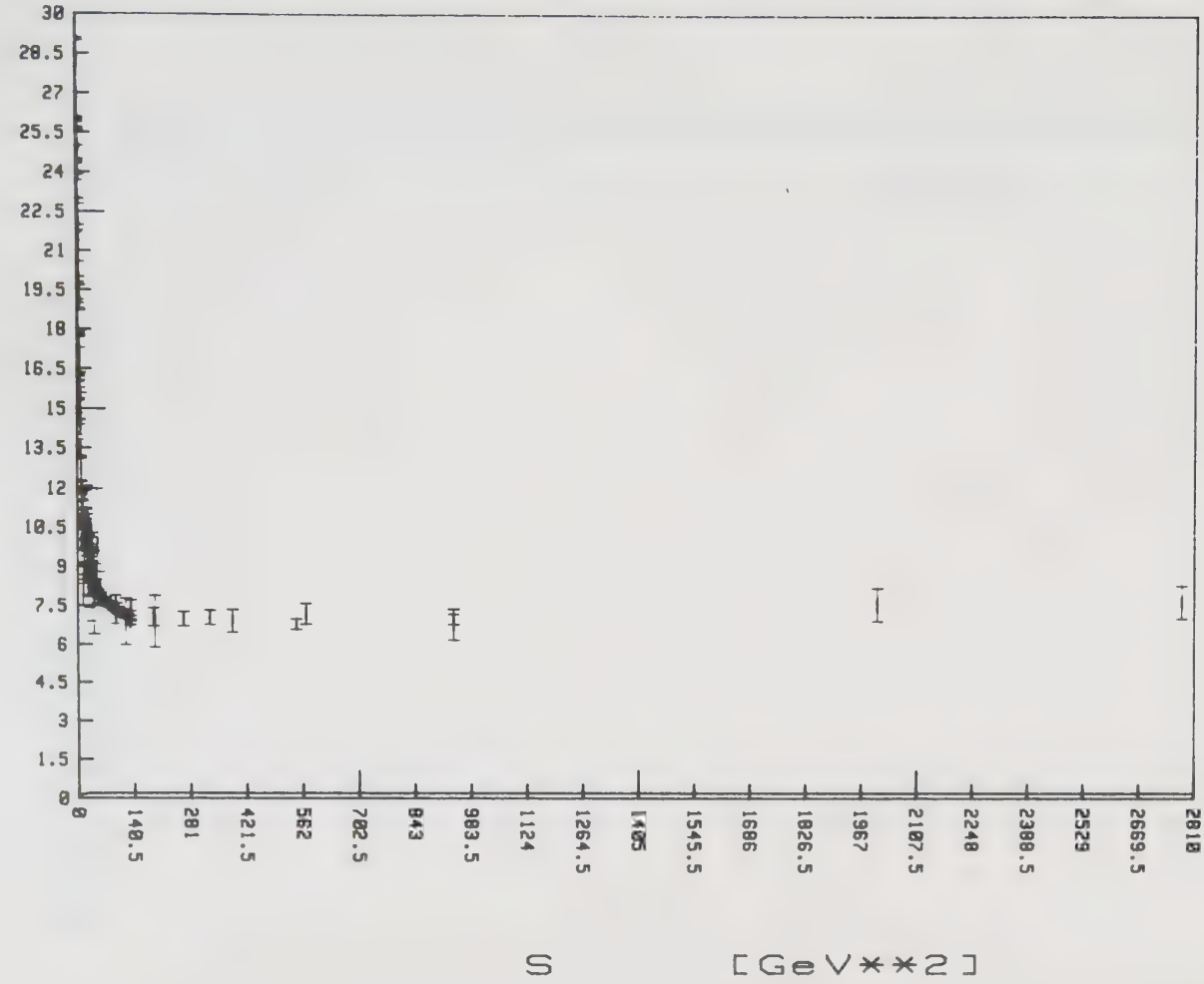
0 140.5 281 421.5 562 702.5 843 983.5 1124 1264.5 1405 1545.5 1686 1826.5 1967 2107.5 2248 2388.5 2529 2669.5 2810

Graph 1f

Proton-Proton-Streuung



Proton-Proton-Streuung



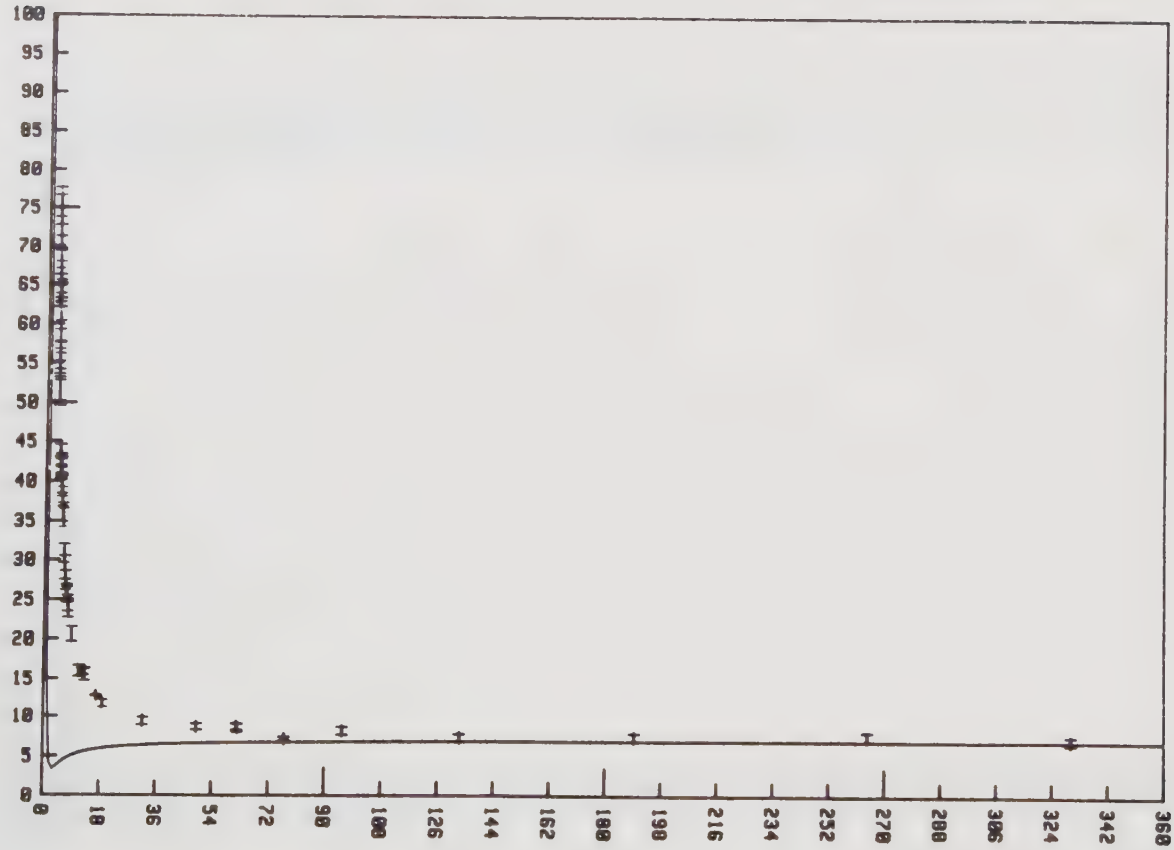
KAPPA=.931

MUE=1.943

L=219.822899516

raph 2a

Proton-Antiproton-Streuung



KAPPA=.931

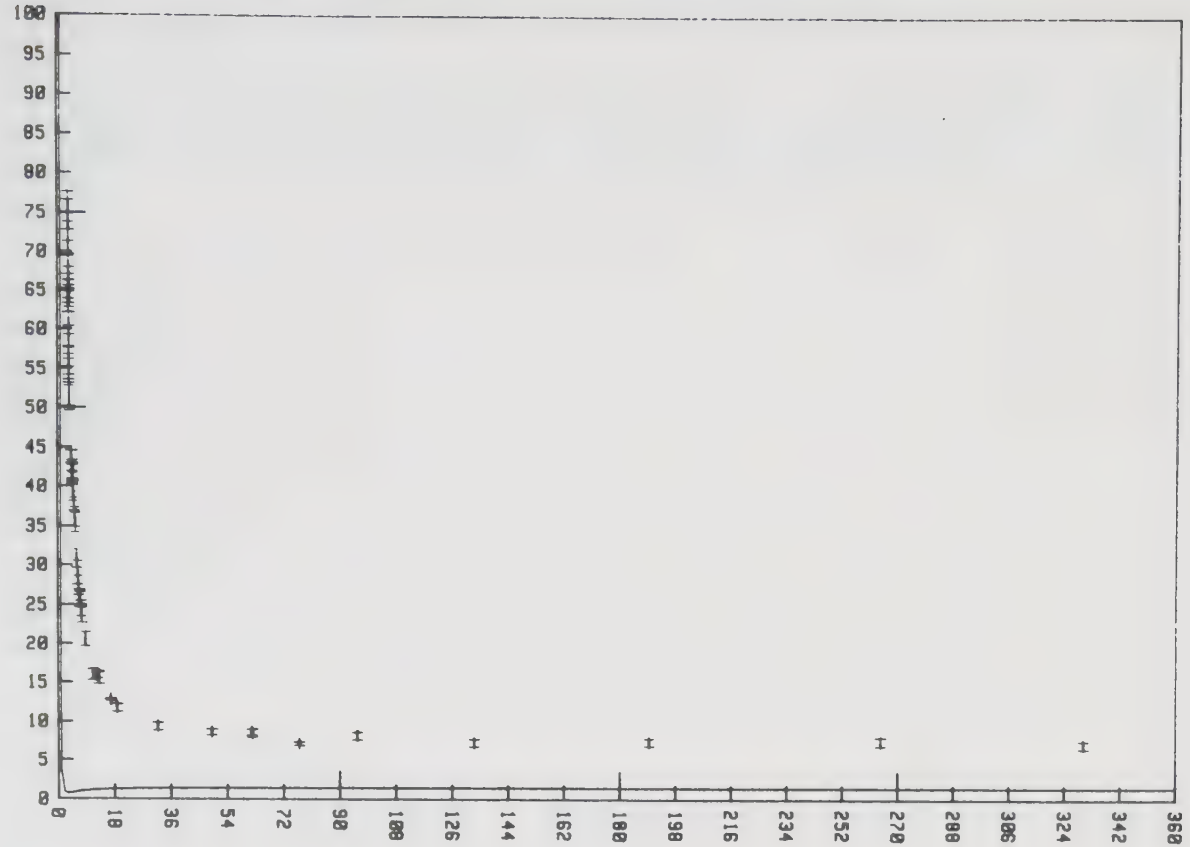
MUE=.317

L=219.022899516

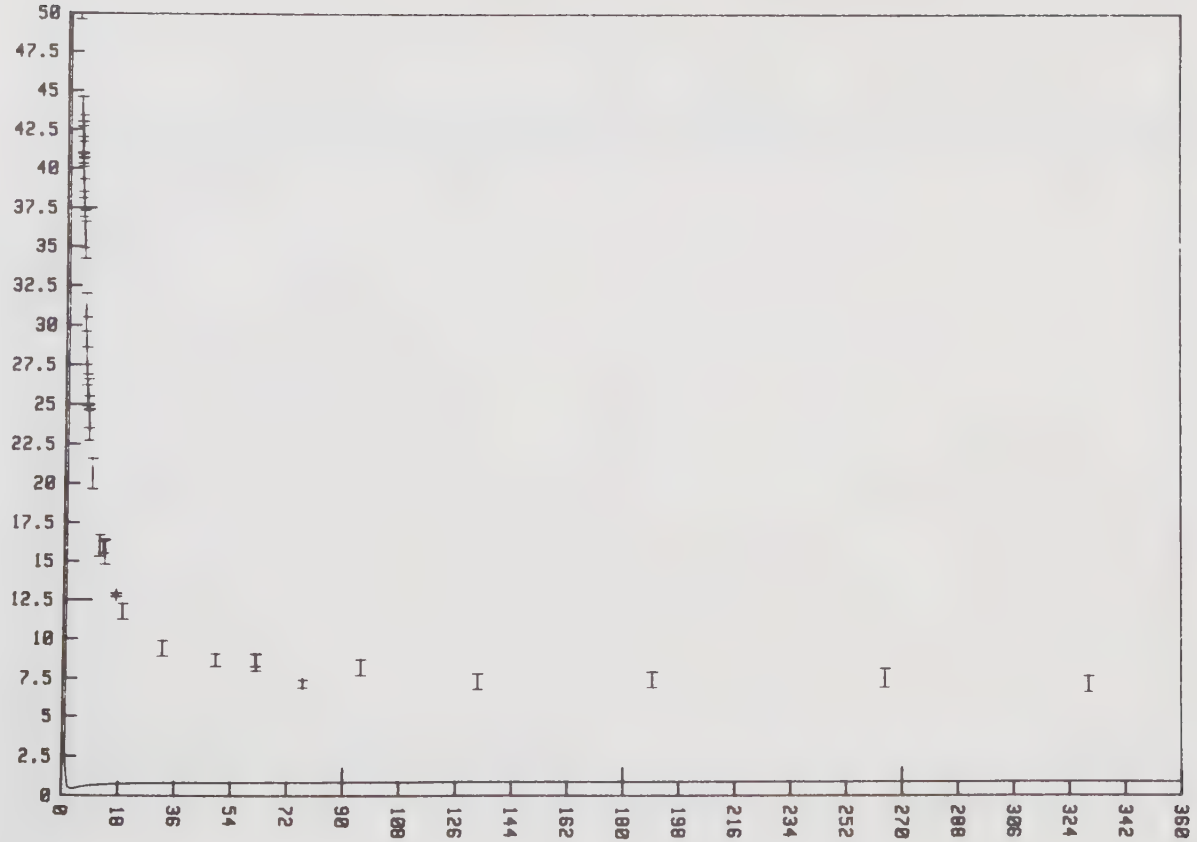
214

Graph 2b

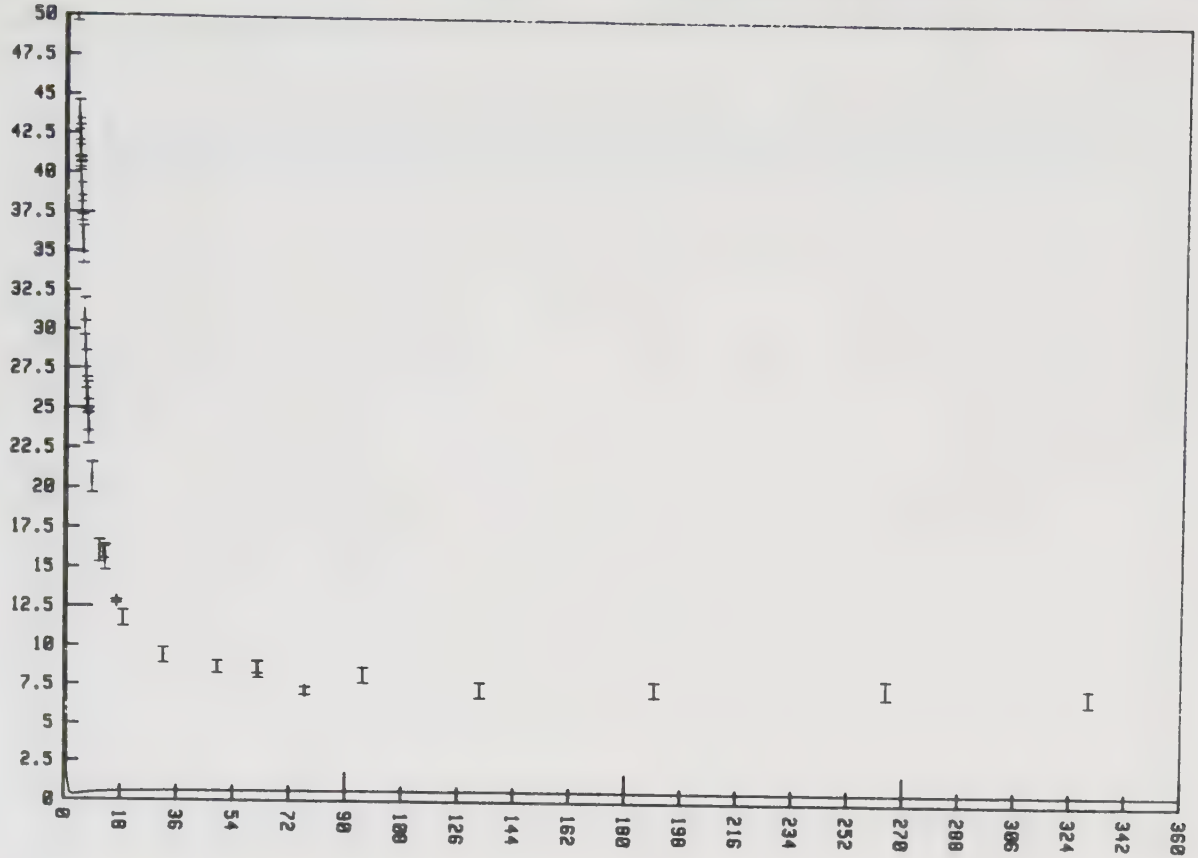
Proton-Antiproton-Streuung



Proton-Antiproton-Streuung



Proton-Antiproton-Streuung



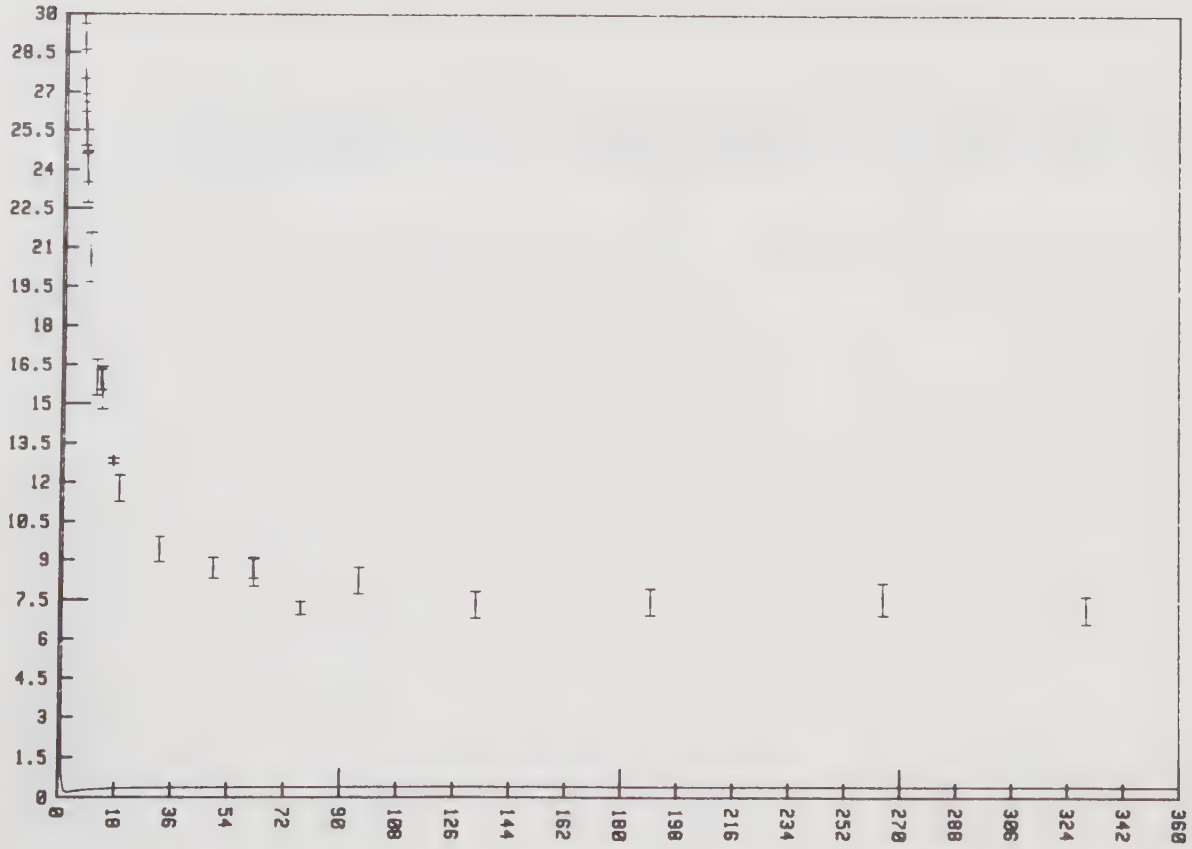
KAPPA=.931

MUE=1.113

L=219.022099516

Graph 2e

Proton-Antiproton-Streuung



Sigma [mBarn]

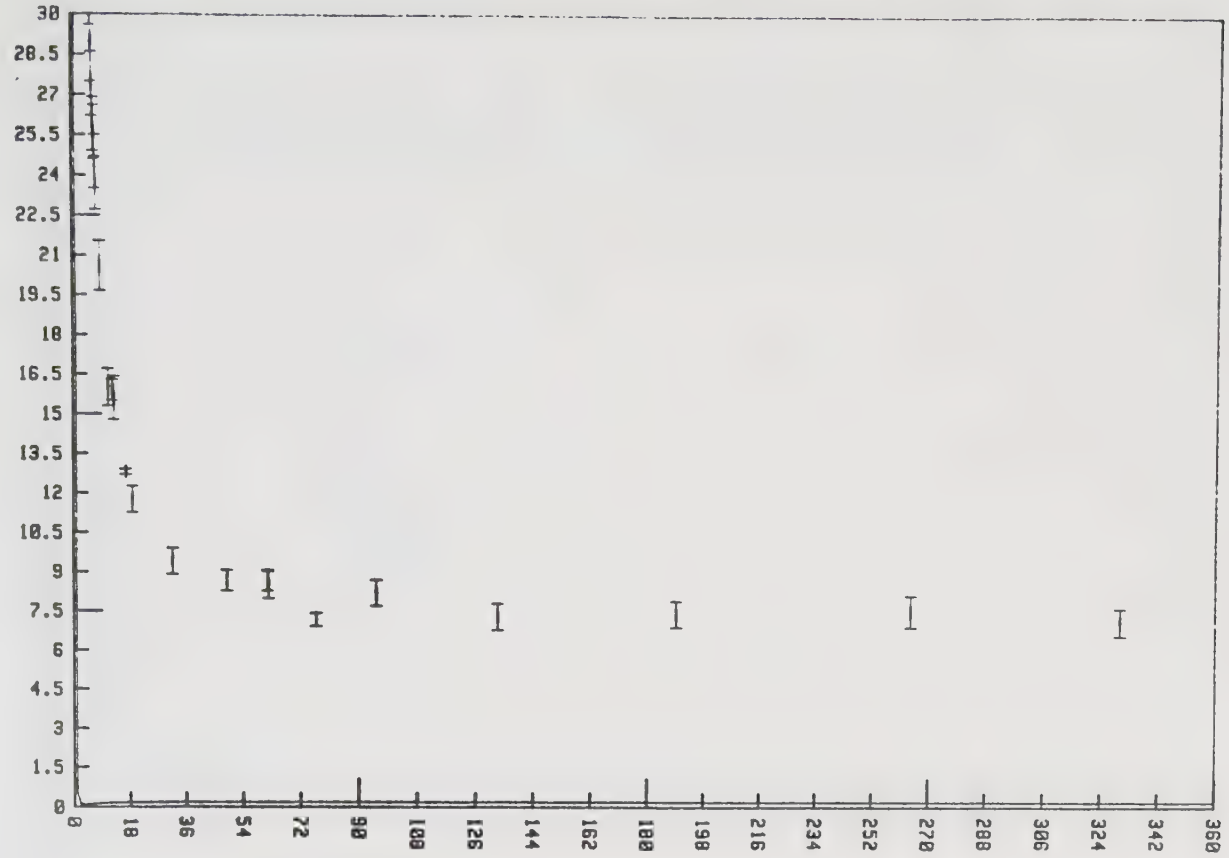
KAPPA=.931

MUE=1.399

L=219.022899516

S [GeV**2]

Proton-Antiproton-Streuung



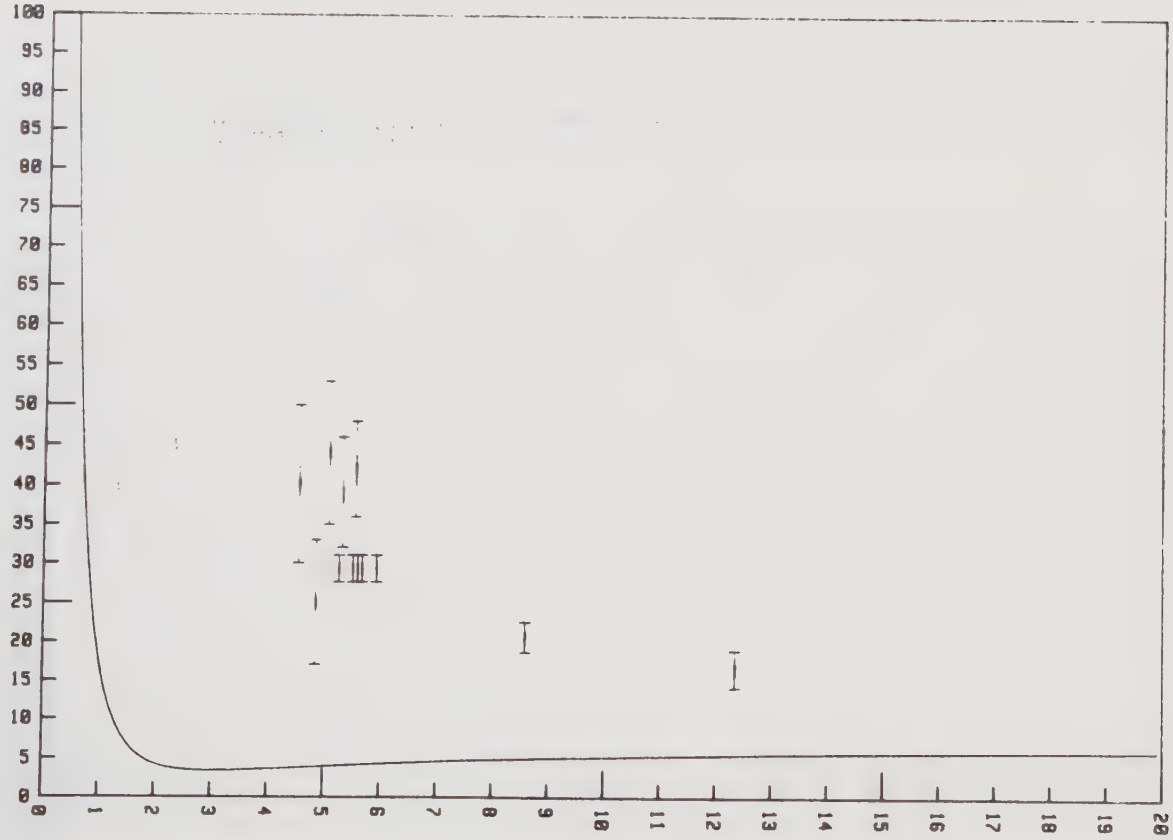
KAPPA=.93

MUE=1.94

L=219.02289951

Graph 3a

Neutron-Antiproton-Streuung



KAPPA=.931

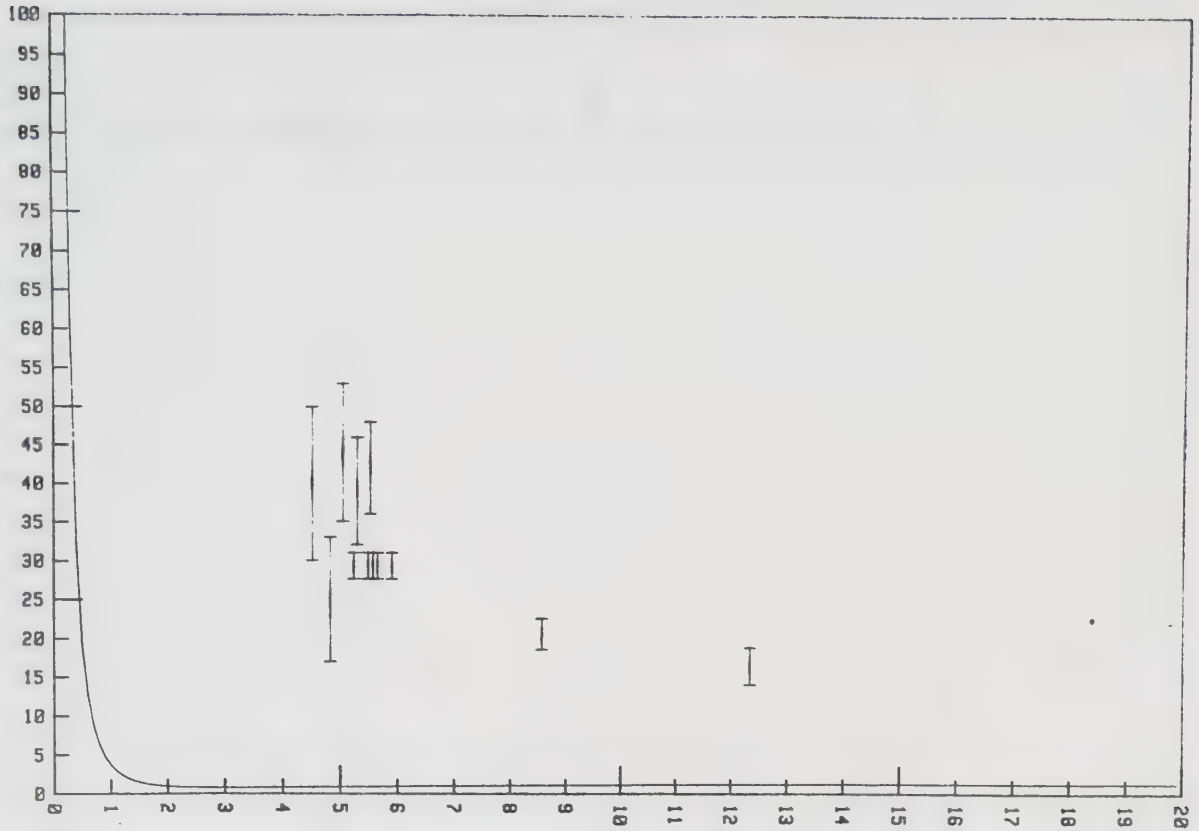
MUE=.317

L=219.822899516

220

Graph 3b

Neutron-Antiproton-Streuung



KAPPA=.93

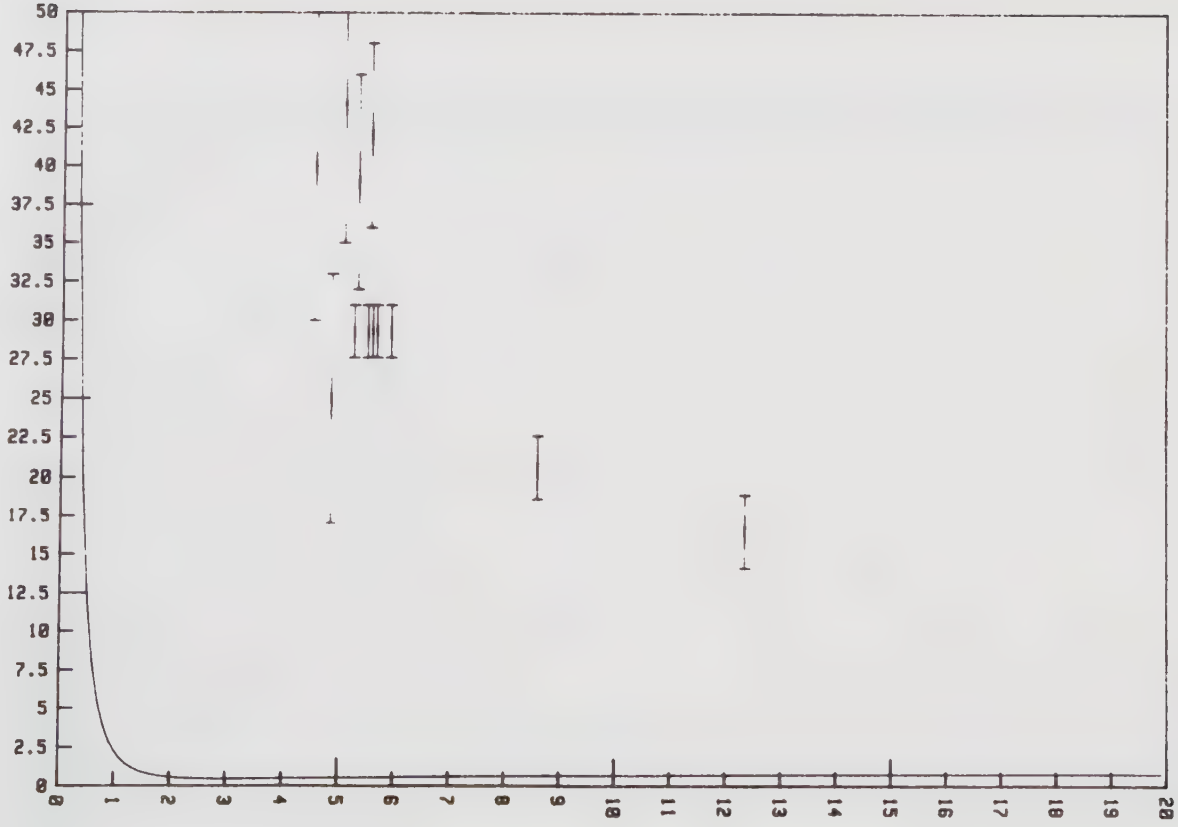
MUE=.725

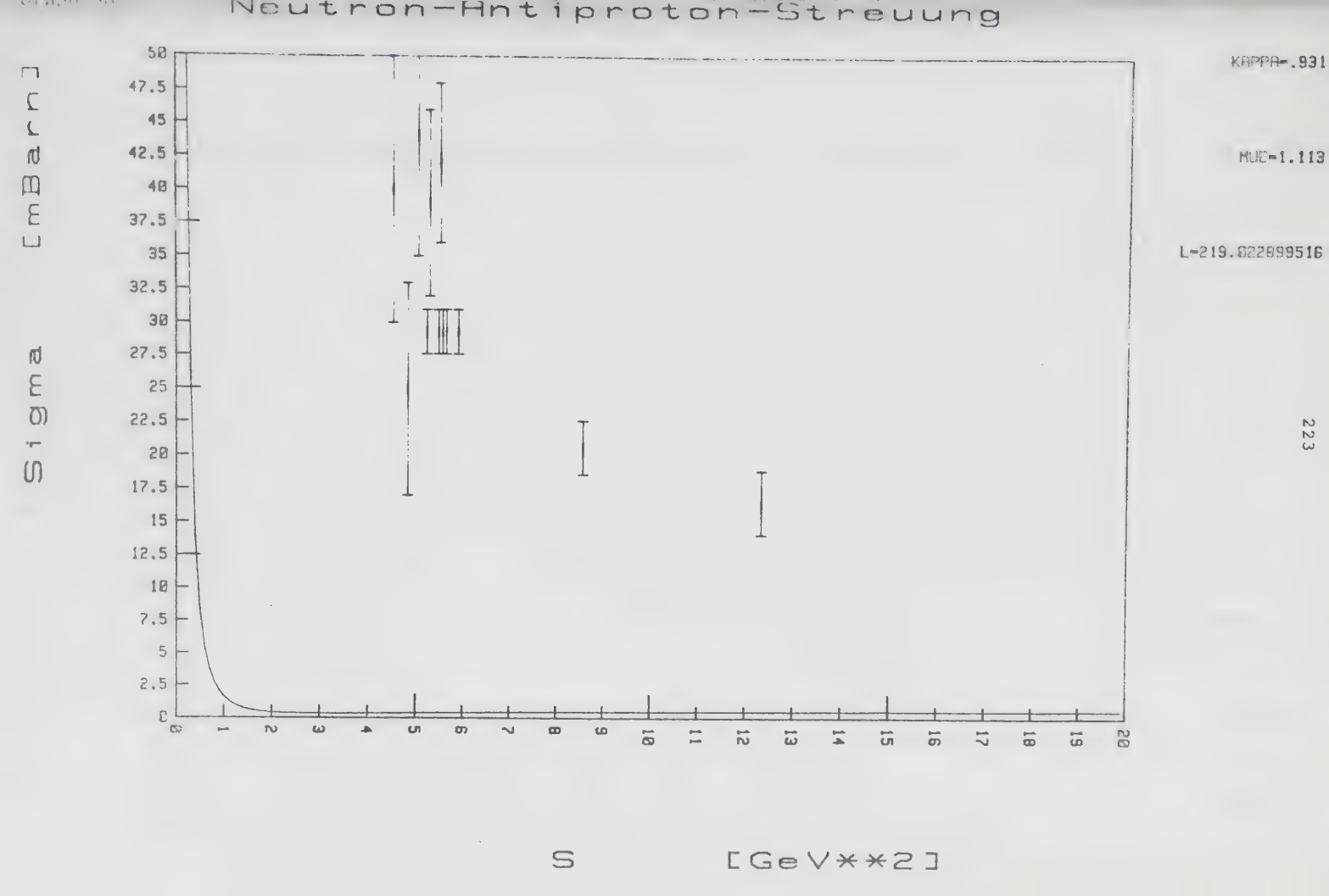
L=219.022899516

221

Graph 3c

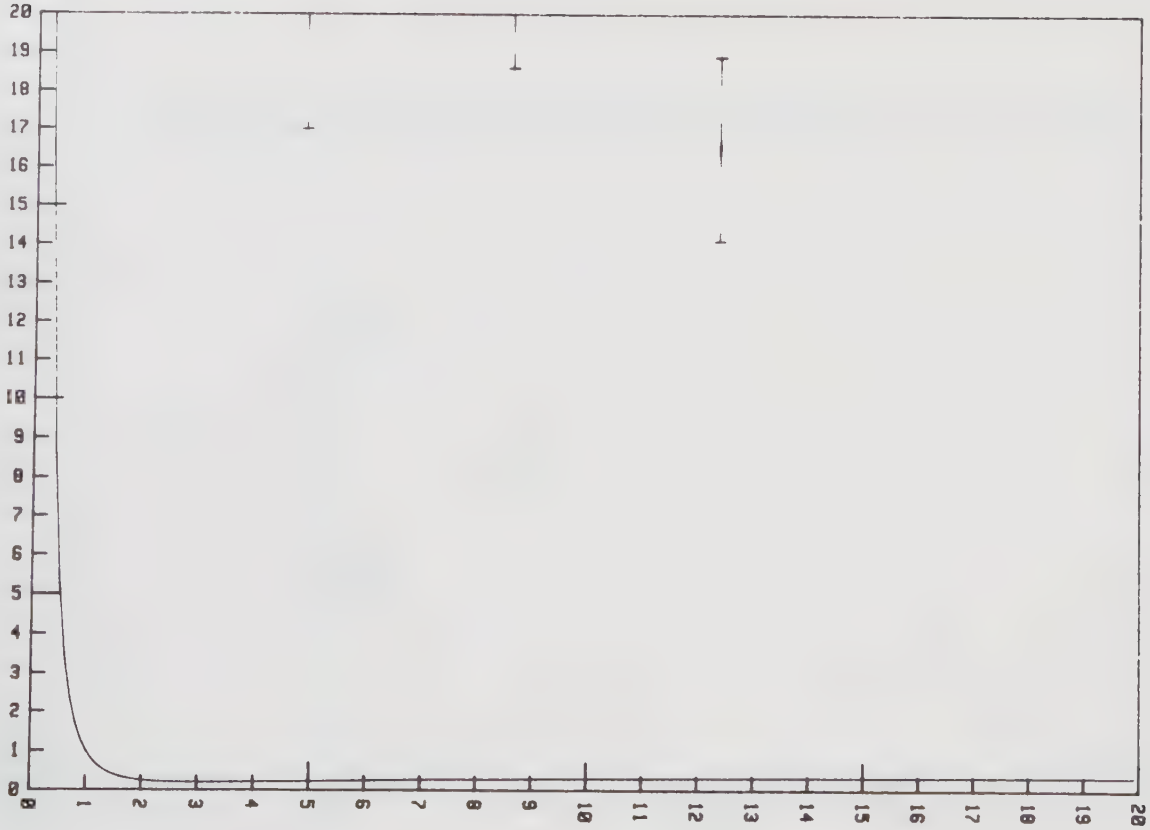
Neutron-Antiproton-Streuung




Neutron-Antiproton-Streuung
KAPPA=.931
MUE=1.113
L=219.022899516
Sigma [mBarn]
S [GeV**2]
0
2.5
5
7.5
10
12.5
15
17.5
20
22.5
25
27.5
30
32.5
35
37.5
40
42.5
45
47.5
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

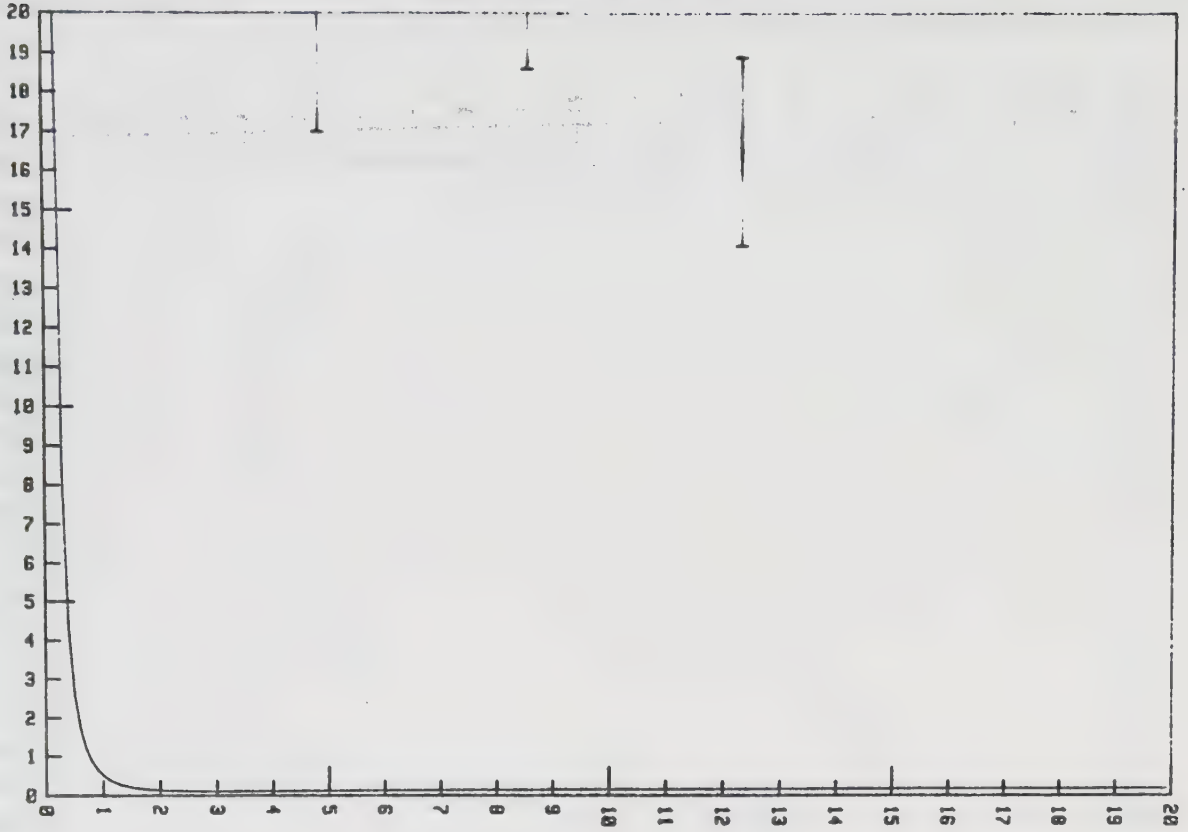
Graph 3e

Neutron-Antiproton-Streuung



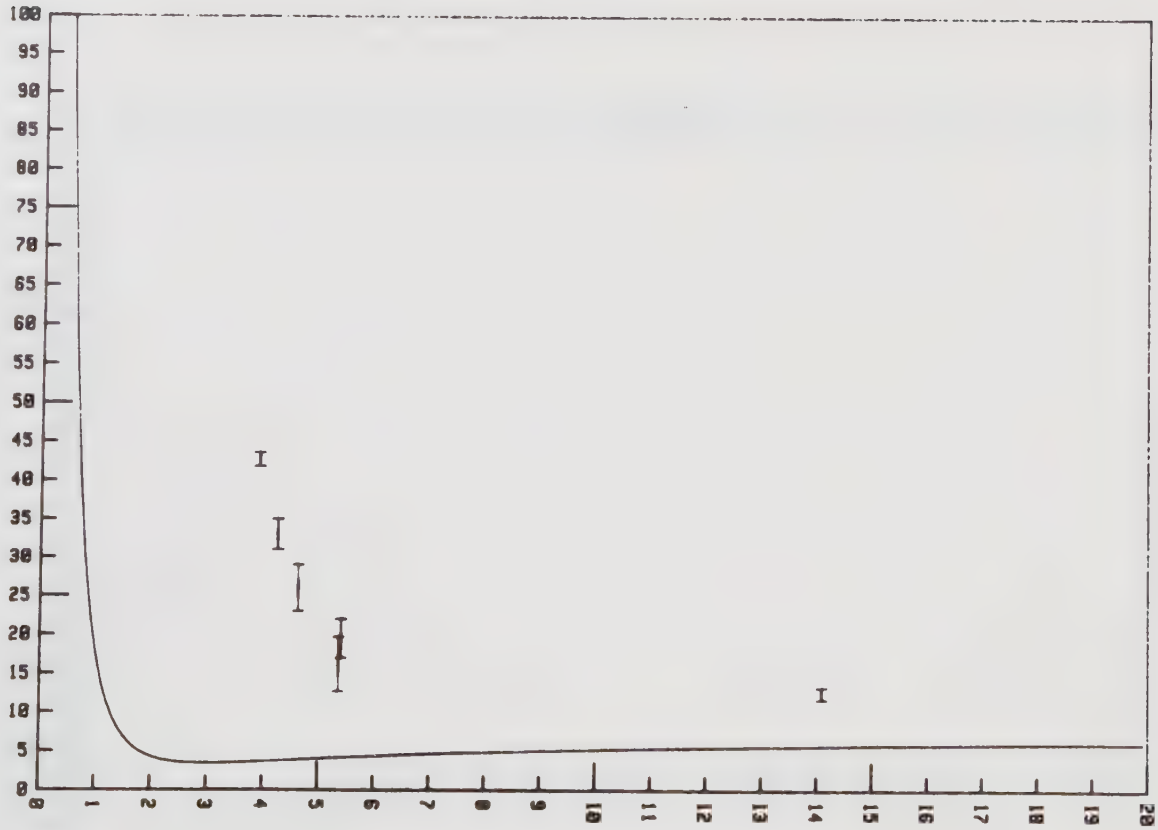
Graph 3f

Neutron-Antiproton-Streuung



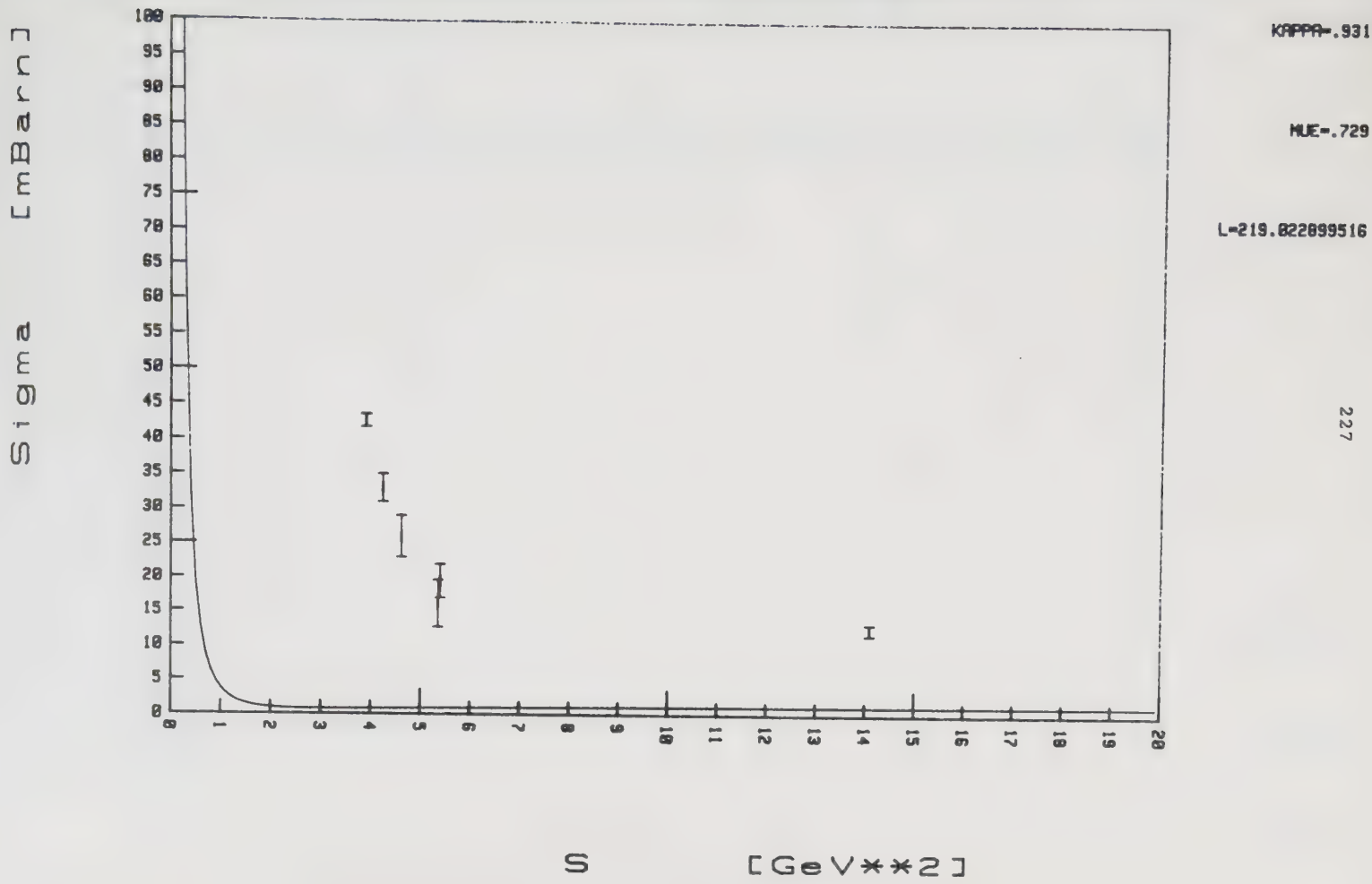
Graph 4a

Proton-Neutron-Streuung



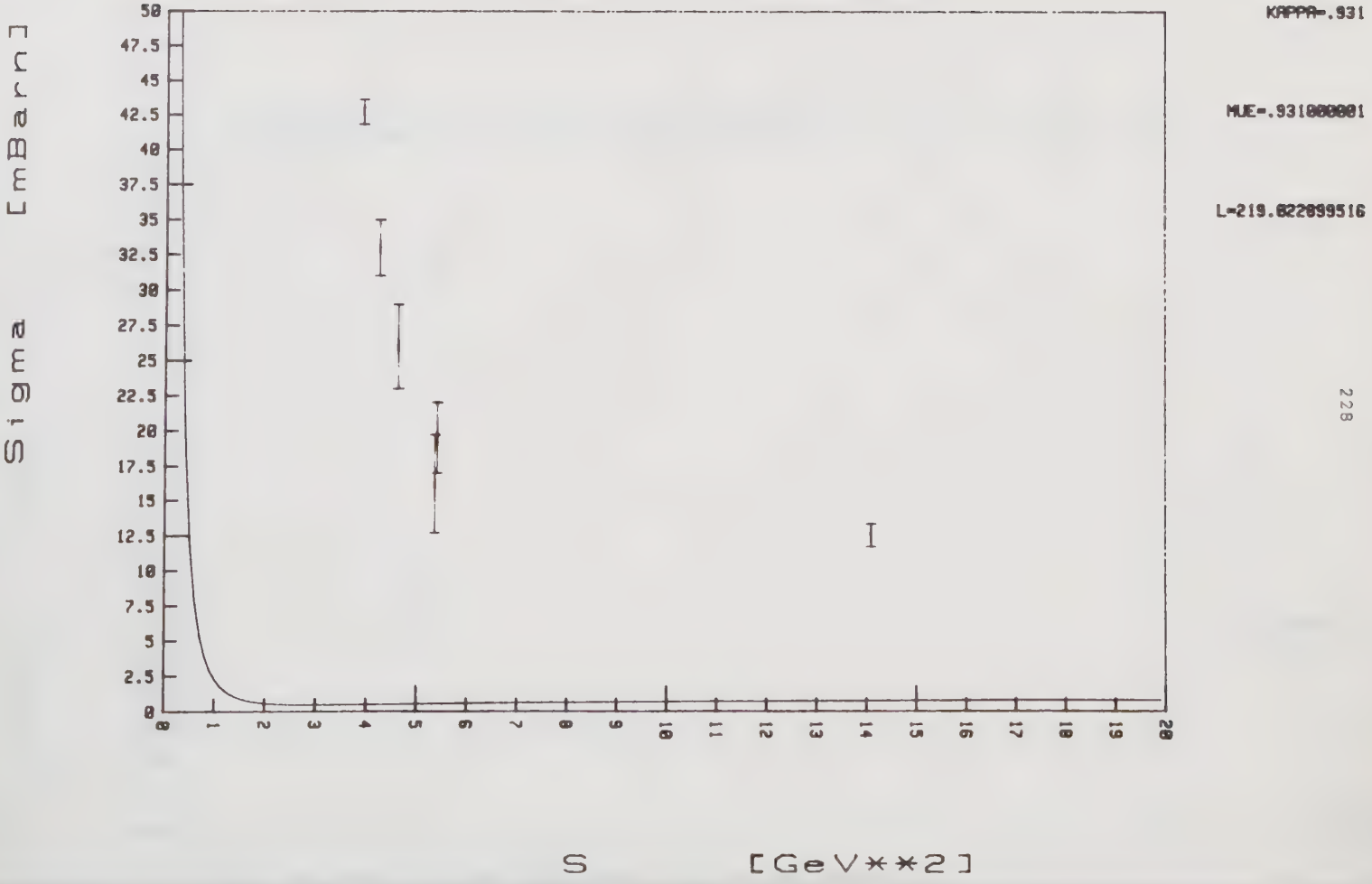
Graph 46

Proton-Neutron-Streuung



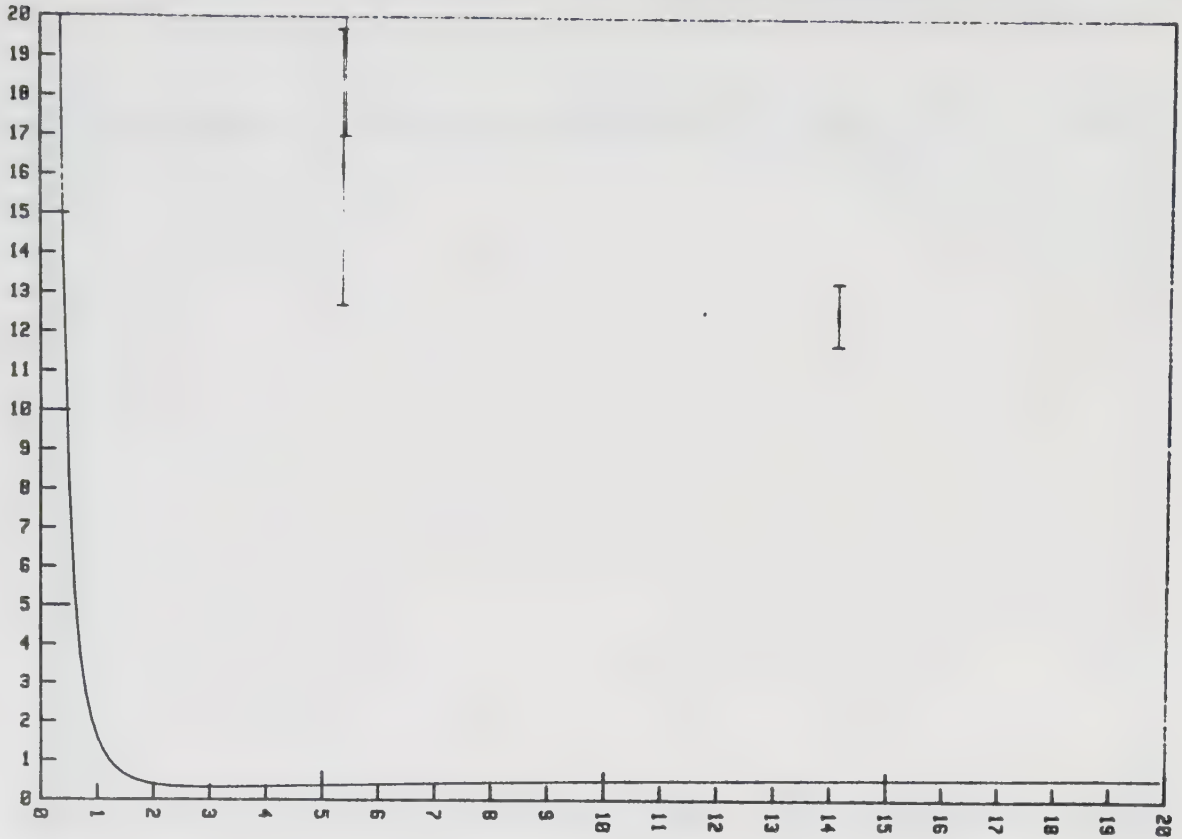
Graph 4c

Proton-Neutron-Streuung



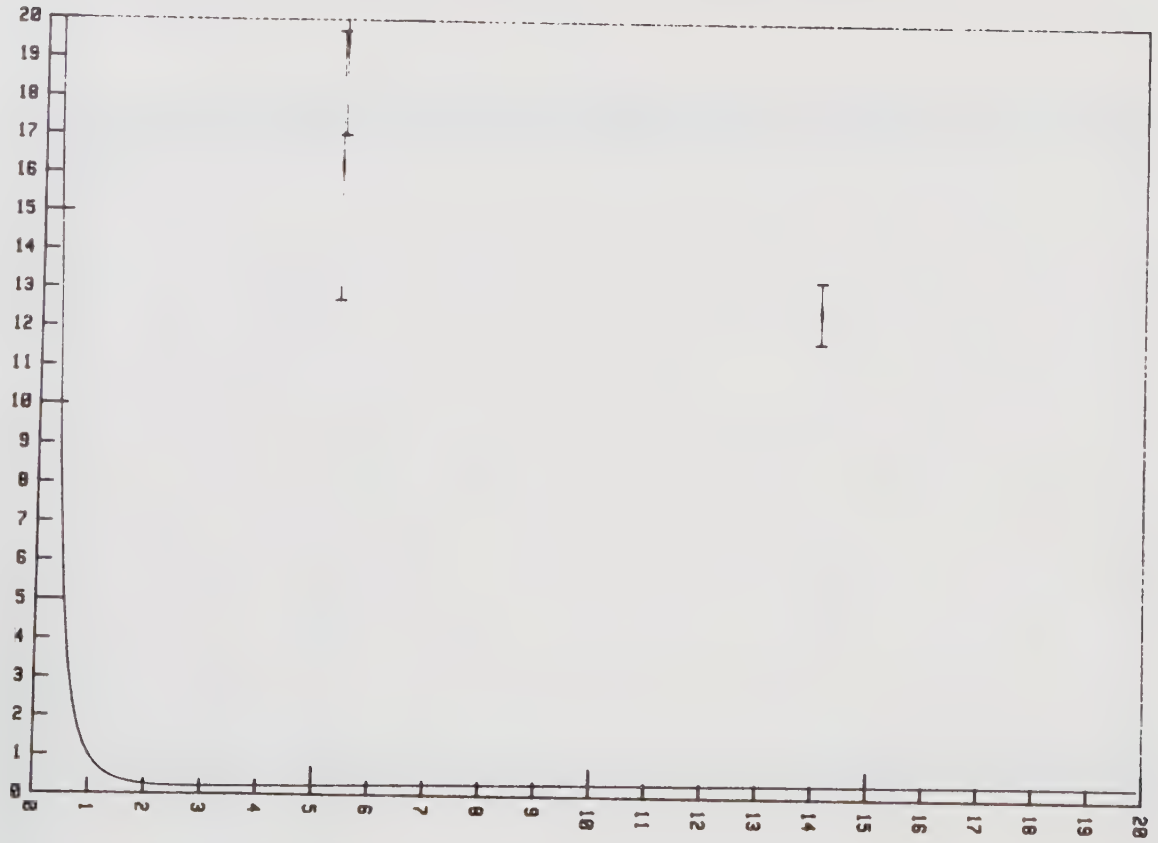
Graph 4d

Proton-Neutron-Streuung



Graph 4e

Proton-Neutron-Streuung



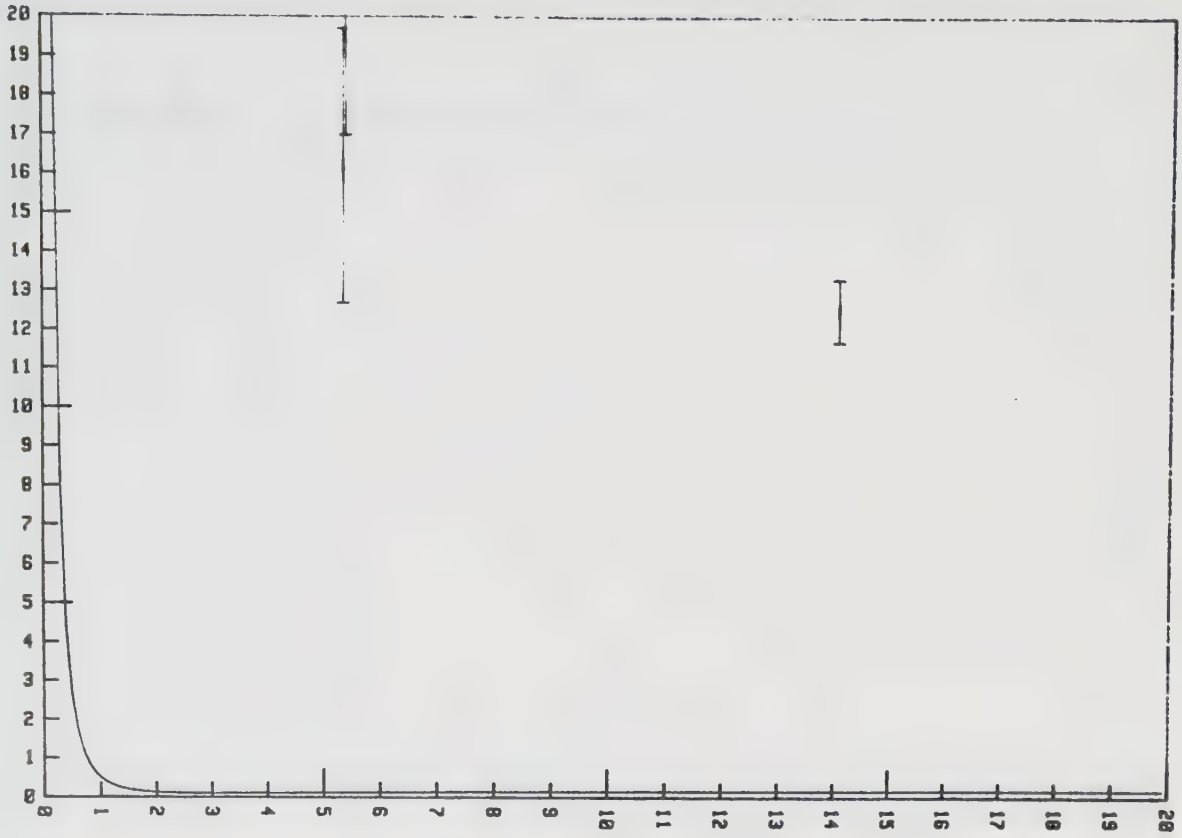
KAPPA=.931

MUE=1.399

L=219.822899516

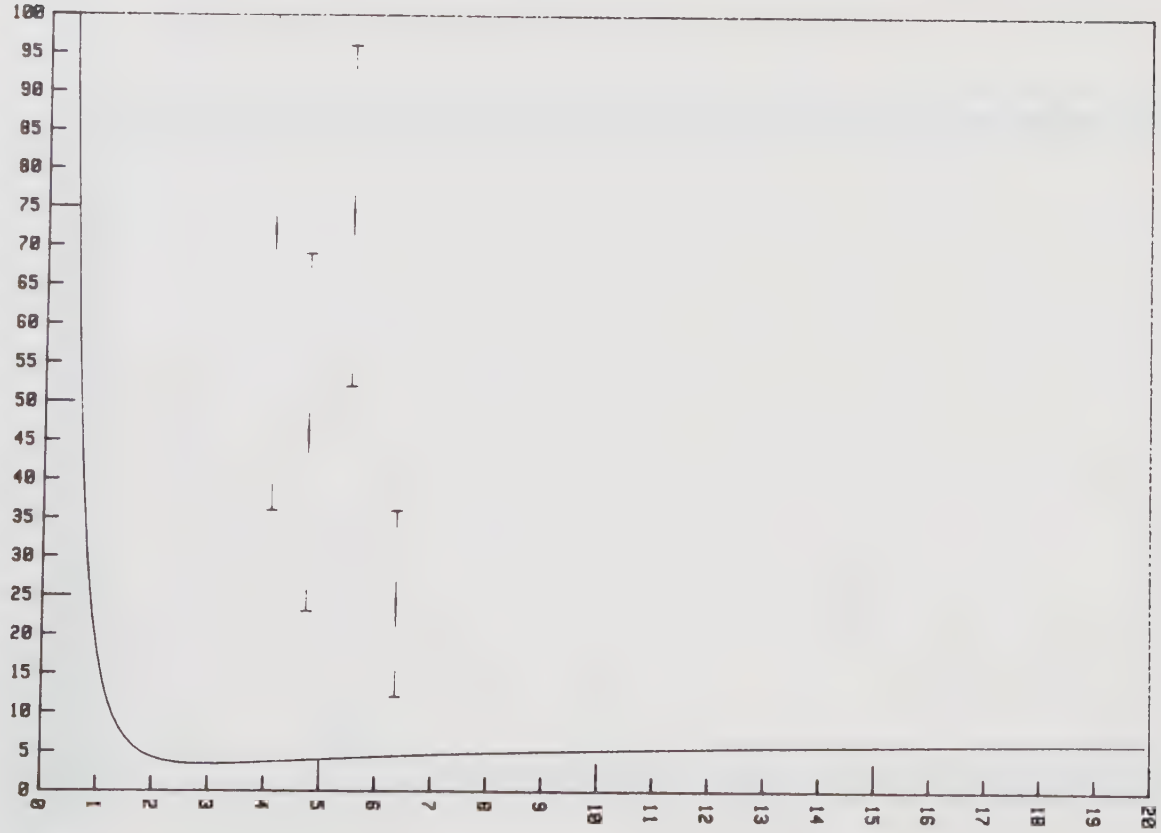
Graph 44

Proton-Neutron-Streuung

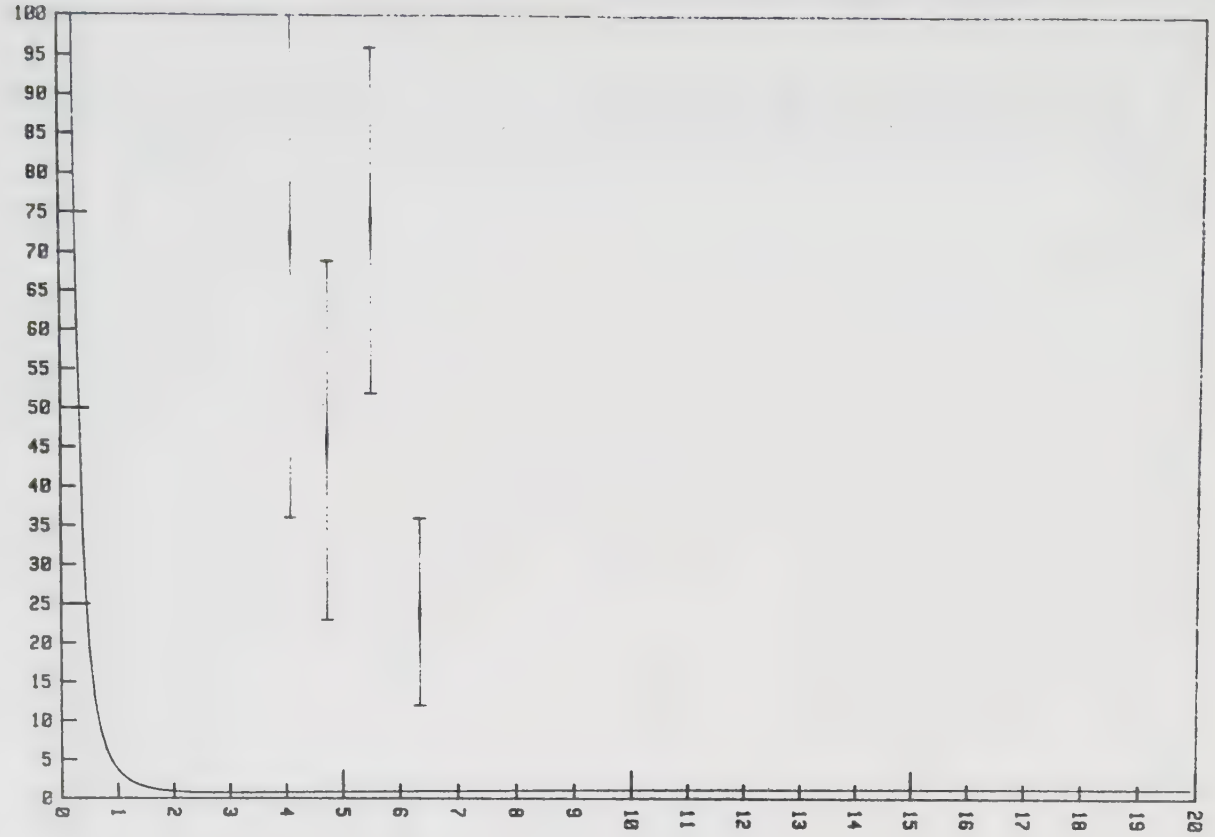


Graph 5a

Proton-Antineutron-Streuung



Proton-Antineutron-Streuung



Sigma [mBarn]

S [GeV**2]

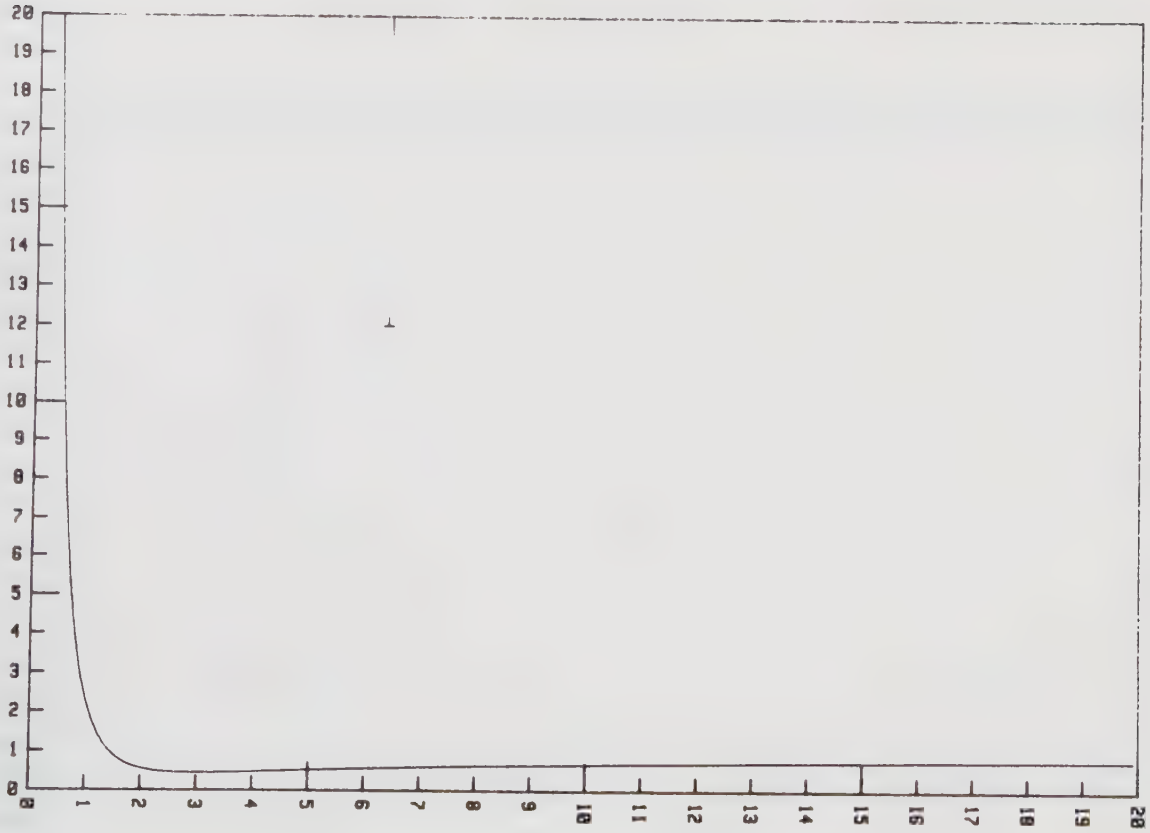
KAPPA=.93

MUE=.725

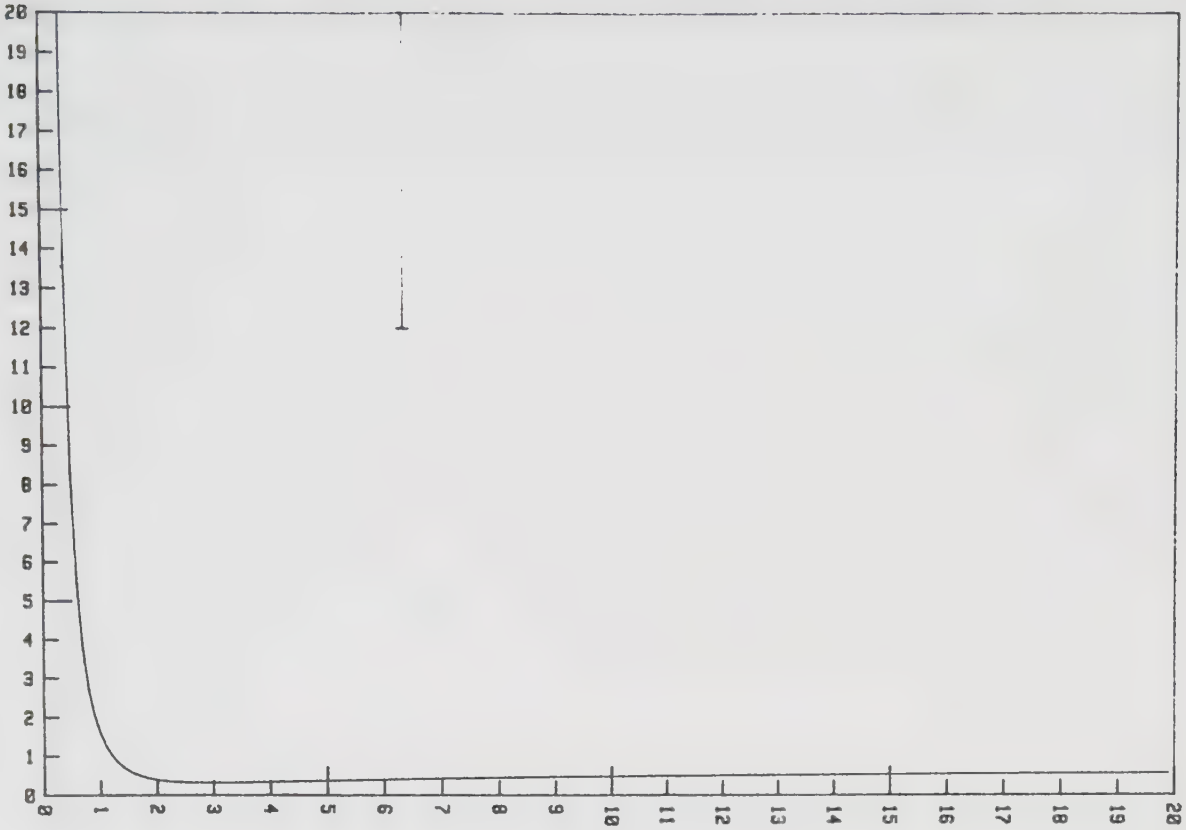
L=219.022899518

Graph 5c

Proton-Antineutron-Streuung

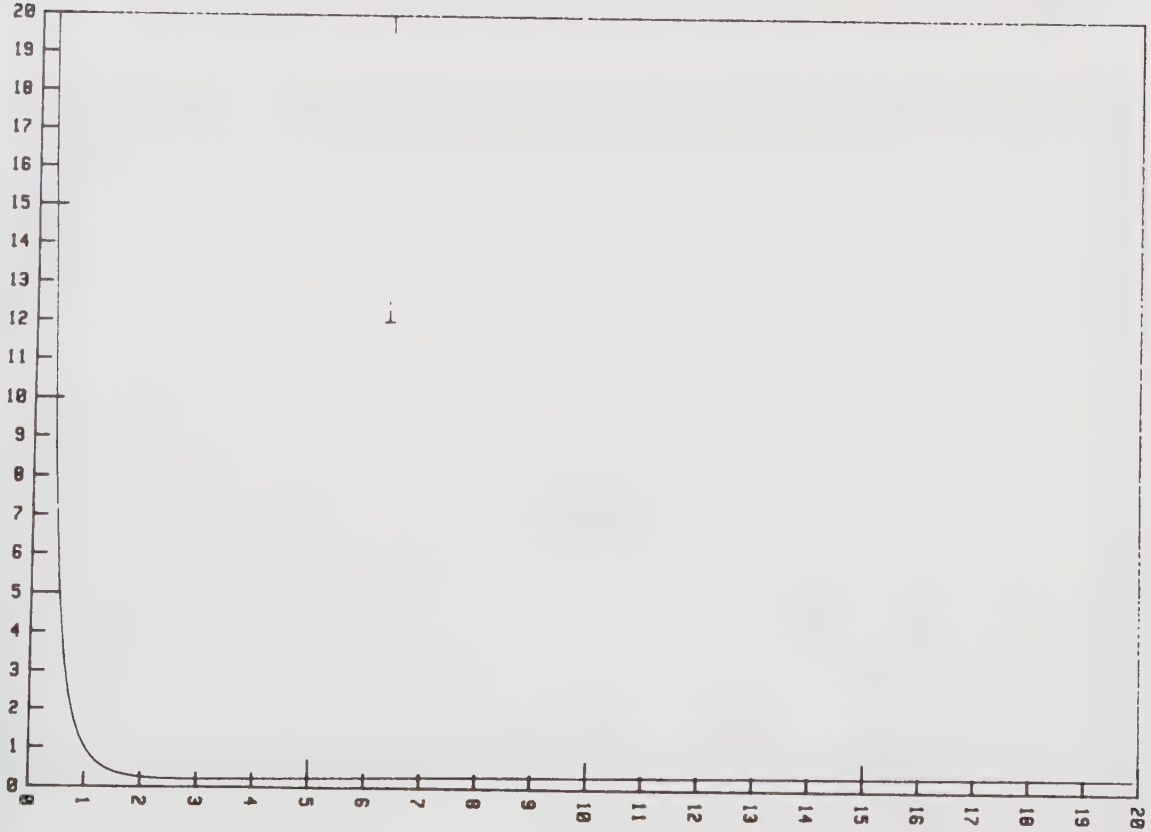


Proton-Antineutron-Streuung



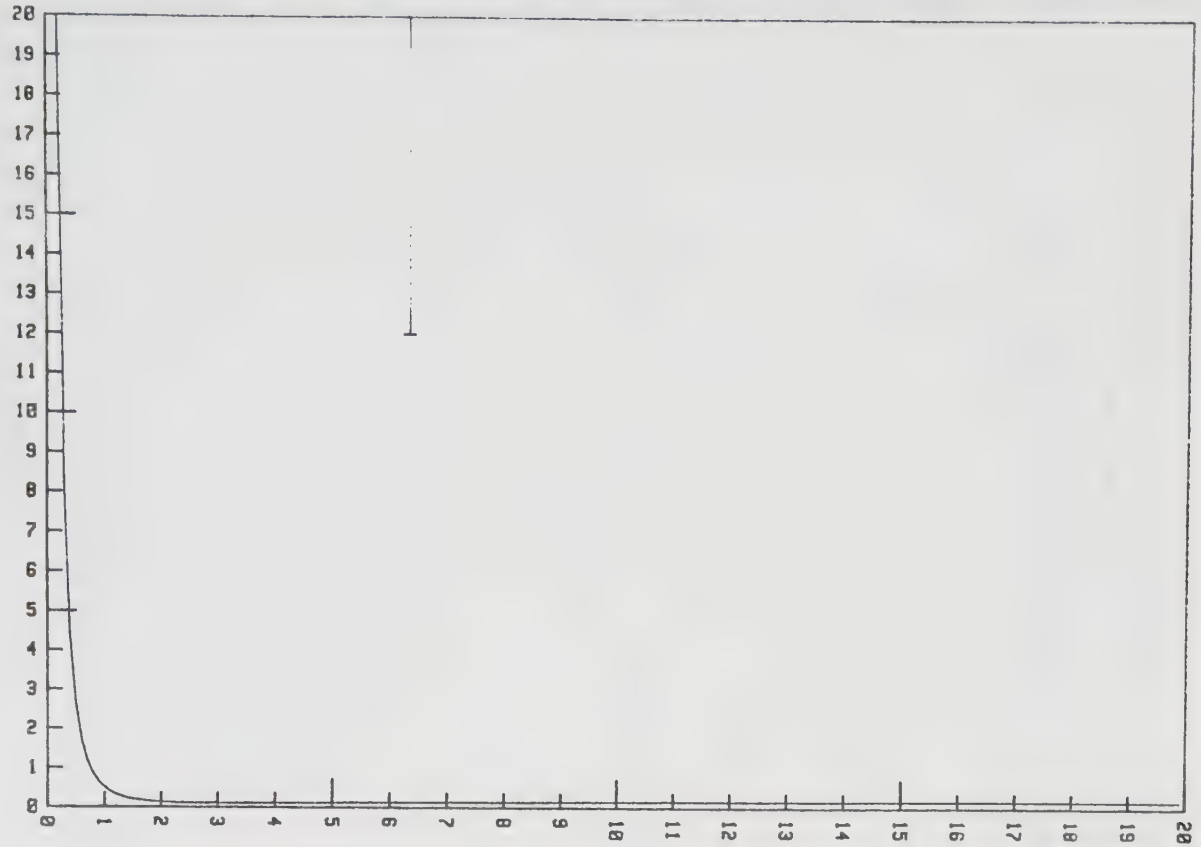
Graph 5e

Proton-Antineutron-Streuung



Graph 5f

Proton-Antineutron-Streuung



KAPPA=.9

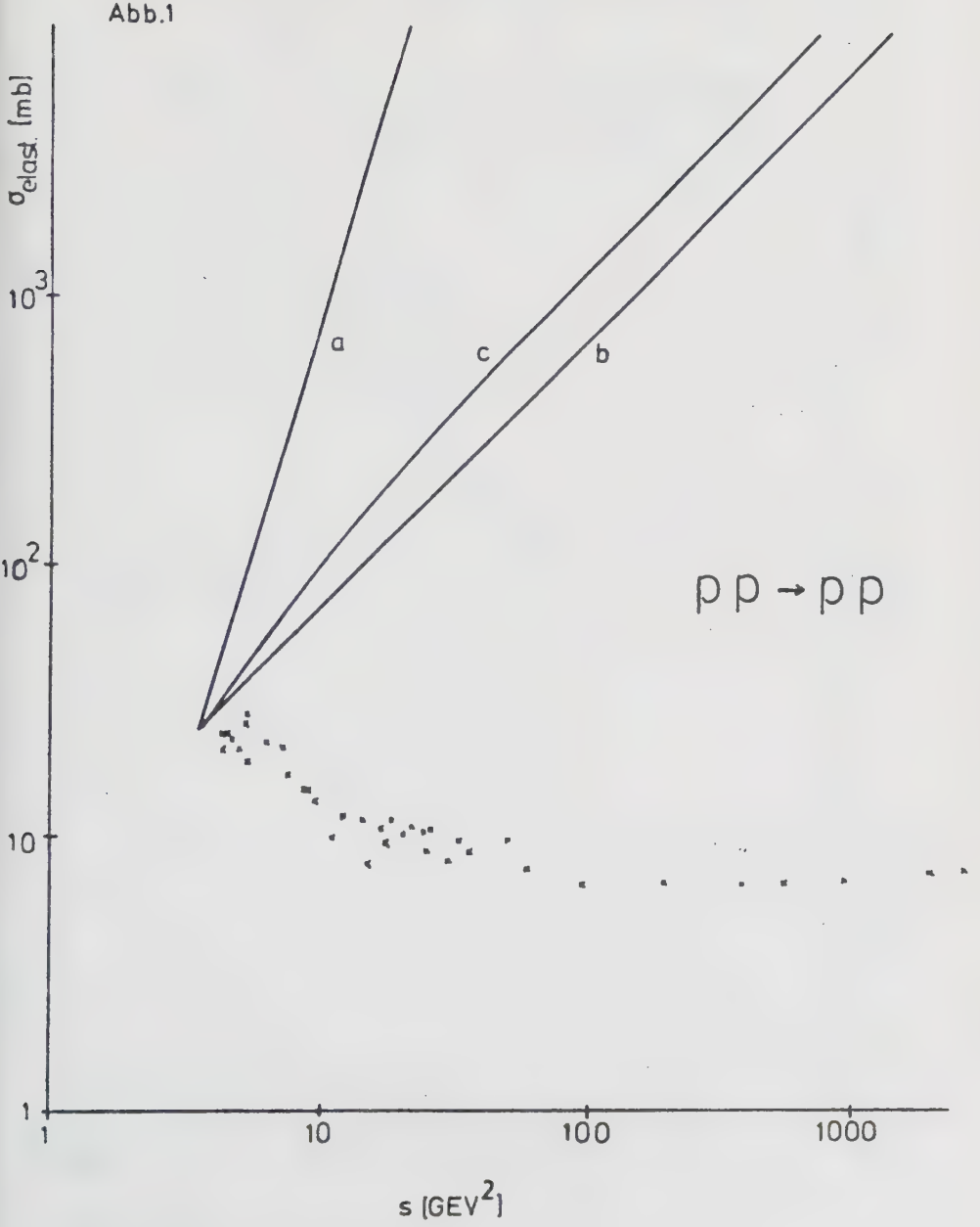
MUE=1.9

L=219.0228995

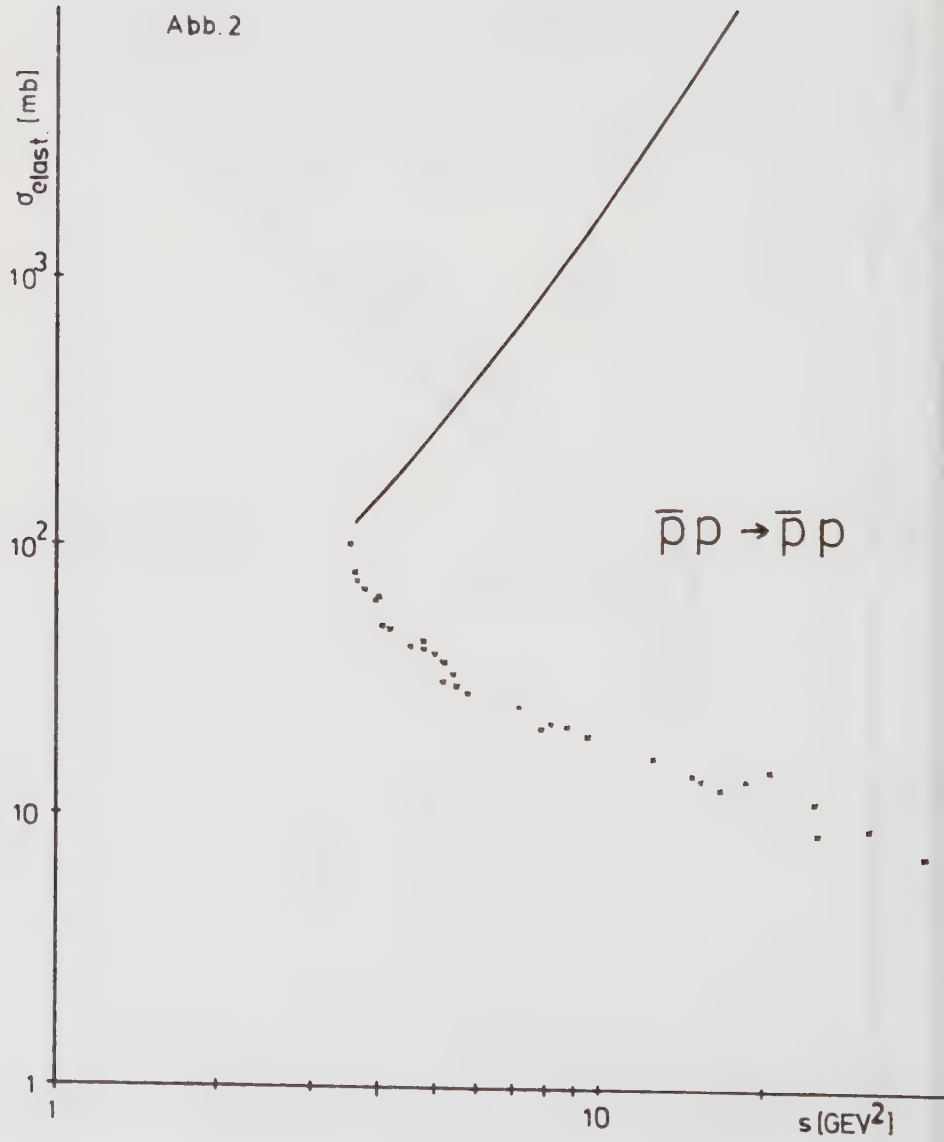
Wie man sieht, erhält man für die kleinste Geistermasse die beste Anpassung an das Experiment. Um dem Leser einen Eindruck zu geben, welche die besten Ergebnisse waren, die innerhalb der Arbeitsgruppe Prof. Stumpf bislang erzielt worden waren, reproduziere ich im folgenden die resultierenden Graphen von verschiedenen Dissertationen, die sich mit demselben Thema befaßt haben.

Vergleichgraph 1 aus Dissertation Wolfgang Philipp

Abb.1



Vergleichsgraph 2 aus Dissertation Wolfgang Philipp



Vergleichsgraph 3 aus Dissertation Günter Hägele

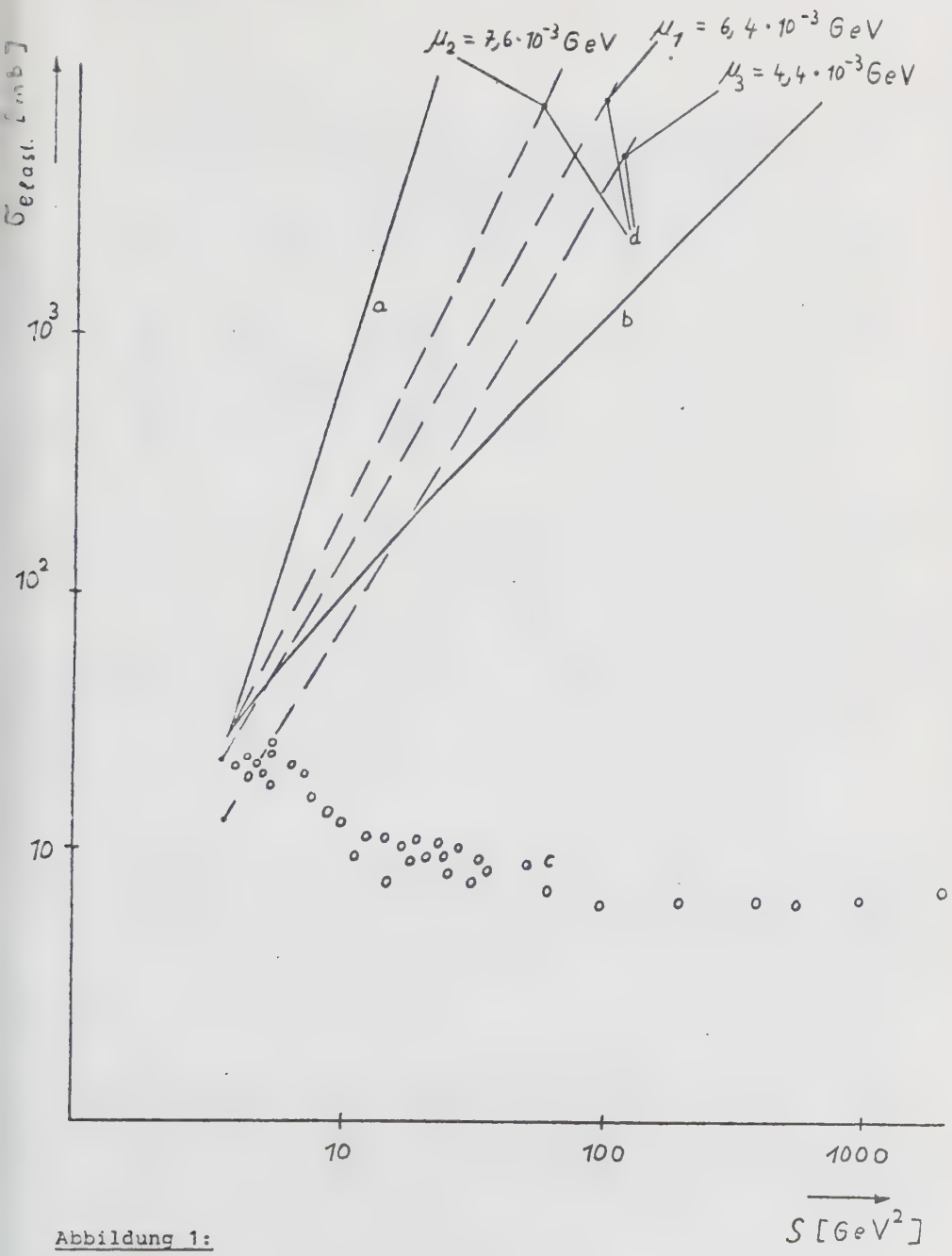


Abbildung 1:

12.4.2 Berechnung des zweiten Terms der ersten Näherung für die Nukleon-Nukleon-Streuung

Der zweite Term der ersten Näherung für den Übergang D_2 zu D_2 lautet nach Gleichung /7.1,18/:

Dieser Term wurde durch Ausrechnung gewonnen:

$$\frac{1}{2!\,2!} \langle \phi_0 | a^2_{\alpha_2} a^1_{\alpha_1} \int \delta(j^1_\alpha + j^2_\alpha)\,(-3)\, G_{\alpha\alpha'} V_{\alpha'\beta\gamma\delta} G_{\delta\bar{\alpha}'} V_{\overline{\alpha'\beta\gamma\delta}} F_{\overline{\beta\beta'}} F_{\overline{\gamma\gamma'}} \,\cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\pi_1} a^{\pi_1}_\beta\Big)\Big(\sum_{\pi_2} a^{\pi_2}_\gamma\Big)\Big(\sum_{\pi_3} j^{\pi_3}_{\bar\beta}\Big)\Big(\sum_{\pi_4} j^{\pi_4}_{\bar\gamma}\Big)\Big(\sum_{\pi_5} a^{\pi_5}_{\bar\delta}\Big)\, j^1_{\beta_1} j^2_{\beta_2} |\phi_0\rangle \qquad (12.4.2,1)$$

$$= \frac{1}{4}(-6)\, G_{\alpha_1\alpha'}(x_1,x')\, V_{\alpha'\beta\beta_2\delta}\, G_{\delta\bar{\alpha}'}(x',x)\, V_{\overline{\alpha'\beta\gamma\beta_1}}\, F_{\overline{\gamma\beta}}(x,x')\, F_{\overline{\beta}\alpha_2}(x,x_2)\, \phi\binom{x_1\, x_2}{\beta_1\, \beta_2}$$

Wie man sieht entspricht diese Gleichung dem oberen Graphen.
Nach Fouriertransformation erhält man für diese Gleichung:

$$\frac{-6}{(2\pi)^8\, 4} \int dp_3\, dp_1\, dp_2\; V_{\alpha\beta\beta_2\delta}\, V_{\overline{\alpha\beta\gamma\beta_1}}\, \delta(q_1+q_2-p_1-p_2)\, \tilde{G}(q_1)\, \tilde{G}(q_1+p_3-p_2)\,\cdot$$

$$\cdot\, \tilde{F}(p_3)\, \tilde{F}(-q_2)\, \phi\binom{p_1\, p_2}{\beta_1\, \beta_2} \qquad (12.4.2,2)$$

Um dieses Integral auszurechnen, erweist es sich als günstig, wenn zuerst die Integration über dp_3 ausgeführt wird. Sie ist mit den weiter oben beschriebenen Methoden ohne Schwierigkeiten zu bewältigen. Die Ausrechnung selbst umfaßt ungefähr 20 Seiten.
Das Integral lautet dann:

$$2^{R^*}{}^{nn}_{nn} = \frac{L^6(-6)\,i\pi^2}{(2\pi)^8\,4}\int dp_1\,dp_2\,dq_1\,dq_2\;\frac{\delta^0(K^2_{a_1}+K^2_{a_2}-\kappa_1^2-\kappa_2^2)}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\mu_1^2-\mu_1^2)^2}\sum_{\lambda_1\lambda_2}(-1)^P\sum_{\lambda_1'\lambda_2'}(-1)^P$$

$$\otimes\Big[O_1+(q_1-p_2)O_2+(q_1-p_2)^2O_3+(q_1-p_2)^3O_4+(q_1-p_2)^4O_5$$
$$+O_6\,(q_1-p_2)^{-2}+O_7\,(q_1-p_2)^{-1}$$
$$+\ln(\mu^2-(q_1-p_2))\Big[(q_1-p_2)^5O_8+(q_1-p_2)^4O_9+(q_1-p_2)^3O_{10}$$
$$+(q_1-p_2)^2O_{11}+(q_1-p_2)O_{12}+O_{13}$$
$$+O_{14}\,(q_1-p_2)^{-1}+O_{15}\,(q_1-p_2)^{-2}\Big]$$
$$+\ln(\kappa^2-(q_1-p_2))\Big[(q_1-p_2)^5O_{16}+(q_1-p_2)^4O_{17}+(q_1-p_2)^3O_{18}$$
$$+(q_1-p_2)^2O_{19}+(q_1-p_2)O_{20}+O_{21}$$
$$+O_{22}\,(q_1-p_2)^{-1}+O_{23}\,(q_1-p_2)^{-2}\Big]\Big]\qquad\otimes$$

$$\otimes\;\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\;C_1C_2\qquad[\,G(q_1)\,F(-q_2)-G(q_2)\,F(-q_1)\,]$$

$$\otimes\;\delta^4(p_1-K_{a_{\lambda_1'}})\;\;\delta^4(p_2-K_{a_{\lambda_2'}})\;\;\delta^4(q_1-K_{b_{\lambda_1}})\;\;\delta^4(q_2-K_{b_{\lambda_2}})$$

$$\otimes\;\;u^*_{\alpha_1}(p_1)\;\;u^*_{\alpha_2}(p_2)\;\;u_{\beta_1}(q_1)\;\;u_{\beta_2}(q_2)\qquad\overline{V}_{\alpha_2\beta\beta_2\delta}\qquad\overline{V}_{\alpha\beta\alpha_1\beta_1}$$

(12.4.2,3)

wobei die Konstanten O_1 bis O_{23} im Anhang 8 wiedergegeben sind.

Nach den Viererintegrationen erhält man einen zu dem ersten Graphen analogen Ausdruck, der allerdings durch Multiplikation mit einer etwas komplizierten Funktion (der Ausdruck in der geschwungenen Klammer) nun auch von der Mandelstam-Variablen u abhängig ist. Wenn man die Funktion in der geschwungenen Klammer durch $H(\phi_1-\phi_2)$ abkürzt, so erhält man für den zweiten Graphen:

$$
\begin{aligned}
&= i(2\pi)^{+9}\frac{3}{2}\,L^4\;\bar{V}\,\bar{V}\quad\sum_{\lambda}(-1)^{P_\lambda}\quad\sum_{\lambda'}(-1)^{P_{\lambda'}}\\
&u^*_{\alpha_1}(K_{b_{\lambda_1}})\;u^*_{\alpha_2}(K_{b_{\lambda_2}})\;u^{\lambda_1\lambda_2}_{\beta}(K_{a_{\lambda_1}})\;u^{\lambda_1'\lambda_2'}_{\gamma}(K_{a_{\lambda_2'}})\;\delta^4\!\left(K_{a_1}^2+K_{a_2}^2-K_{a_1}^{\prime 2}-K_{a_2}^{\prime 2}\right)\frac{\lambda}{\left(K_{a_1}^2+K_{a_2}^2-\mu_1^2-\mu_2^2\right)^2}\\
&\delta^4(K_{a_{\lambda'}}-K_{b_\lambda})\qquad\qquad C_1C_2\\
&\Bigg\{\frac{w_{\kappa_2}^2\;(\lambda_2'((K^*_{a_{\lambda'}}-w_{\kappa_2})\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})\beta)_{\alpha_2\alpha}\left[(\lambda_1'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\kappa)\beta)(\lambda_1'(-(w_{\kappa_2}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_2}})+i\mu)\beta)^{\dagger}\right]_{\beta\alpha_2}}{2\;w_{\kappa_2}\;\left[(K^*_{a_{\lambda'}}-w_{\kappa_2})^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_2}})^2\right]\;\left[\kappa_2^2-\mu_2^2\right]^2}\;H(K_{a_1}-K_{b_2})\\
&-\frac{w_{\kappa_1}^2\;(\lambda_2'((K^*_{a_{\lambda'}}-w_{\kappa_1})\beta-\bar{K}_b)\beta)_{\alpha_2\alpha}\left[(\lambda_1'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})+i\kappa)\beta)(\lambda_2'(-(w_{\kappa_1}\beta-\bar{K}_{b_{\lambda_1}})+i\mu)\beta)^{\dagger}\right]_{\beta\alpha_2}}{2\;w_{\kappa_1}\;\left[(K^*_{a_{\lambda'}}-w_{\kappa})^2-(\bar{K}_{b_{\lambda_2}})^2\right]\left[\kappa_1^2-\mu_1^2\right]^2}\;H(K_{b_1}-K_{a_2})
\end{aligned}
$$

(12.4.2,4)

Der zweite Graph liefert also die seit Jahren gewünschte Abhängigkeit des Prozesses nach der Mandelstam-Variablen u. Inwieweit eine gute Beschreibung des Experimentes (Differential- und Totalwirkungsquerschnitte) bei dieser Näherung schon erzielt werden kann, bleibt einer späteren Publikation vorbehalten.

Bei der Ausrechnung der Konstanten dieses Graphen wurden die Effekte der Unitarisierung schon berücksichtigt.
Es sei noch bemerkt, daß wir bei dieser Näherung wegen der speziellen Form der Funktion $H(K_{a_1}-K_{b_2})$ die richtigen Potenzen für den partiellen Streuquerschnitt erhalten werden: $u^{-2};u^{-1}$ bis u^5. Unter Beachtung von $u+s+t=4m^2$ erhält man durch Abschätzung qualitativ den experimentellen Verlauf der Kurven. Eine genauere Analyse dieses Sachverhaltes sollte so bald wie möglich durchgeführt werden.

12.5 Die relativistische Lippmann-Schwingergleichung im Zweiteilchenfall

In diesem Abschnitt wird analog dem nichrelativistischen Fall (Anhang 2) vorgegangen. Allerdings ist hierbei zu berücksichtigen, daß im relativistischen Fall nicht auf einen Hamilton-Formalismus zurückgegriffen werden kann. Es wird von der dynamischen Gleichung ausgegangen.

Für /12.2,2/, der ersten Näherung der Wechselwirkung, erhält man dann Gleichung /12.1,2/ unter Berücksichtigung des Fundamentalsatzes der Algebra und nach Annahme der Gültigkeit der freien Gleichung /12.1,1/.

$$[\Box_1 + m_1^2 \; + \Box_2 + m_2^2] \; \Phi(^{x_1}_{\alpha_1}{}^{x_2}_{\alpha_2}|a) = -\frac{6}{2} \; V_{\alpha\beta\gamma\delta} \; [\, G_{\alpha_1\alpha'} F_{\beta\alpha_2} - G_{\alpha_2\alpha'} F_{\beta\alpha_1}] \; \Phi(^{x_1}_{\gamma}{}^{x_2}_{\delta}|a) \tag{12.5,1}$$

Die Durchführung einer Fouriertransformation in die Impulsdarstellung ergibt:

$$[-p_1^2 + m_1^2 \; -p_2^2 + m_2^2] \; \Phi(^{p_1}_{\alpha_1}{}^{p_2}_{\alpha_2}|a) = \frac{6}{2}\frac{L^2}{2} \; \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} (2\pi)^{-4} \int dq_1 \; dq_2 \; \delta(q_1+q_2-p_1-p_2) \cdot$$
$$\cdot \; \tilde{\Phi}(^{q_1}_{\delta}{}^{q_2}_{\gamma}|a) \; [\, \tilde{G}_{\alpha_1\alpha'}(p_1) \; \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2) - \tilde{G}_{\alpha_2\alpha'}(p_2) \; \tilde{F}_{\beta\alpha_1}(-p_1)] \tag{12.5,2}$$

Transformiert man ferner in das Schwerpunktssystem, so erhält man:

$$[\, \frac{1}{2}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2)\,] \; \Phi_{CM}(^{p_s}_{\alpha_1}{}^{p_r}_{\alpha_2}|a) =$$

$$\frac{6}{2}\frac{L^2}{2} \; \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \; (2\pi)^{-4} \int dq_s \, dq_r \;\; \delta(q_s - p_s) \;\; \tilde{\Phi}_{CM}(^{q_s}_{\delta}{}^{q_r}_{\gamma}) \cdot$$
$$\cdot \; [\tilde{G}_{\alpha_1\alpha'}(\frac{p_s}{2} + p_r) \; \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(\frac{p_s}{2} - p_r) - \tilde{G}_{\alpha_2\alpha'}(-\frac{p_s}{2} + p_r) \; \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-\frac{p_s}{2} - p_r)\,]$$
$$= \tilde{\tilde{V}}^{s} \; \tilde{\Phi}_{CM}(^{p_s}_{\alpha_1}{}^{p_r}_{\alpha_2}|a) \tag{12.5,3}$$

Die Division durch die Resolvente ergibt schließlich:

$$\tilde{\Phi}_{CM}(^{p_s}_{\alpha_1}{}^{p_r}_{\alpha_2}|a) = g_o(0,p_s,p_r) \; \tilde{\tilde{V}}^{s} \; \tilde{\Phi}_{CM}(^{p_s}_{\delta}{}^{p_r}_{\gamma}|a) \tag{12.5,4}$$

mit $g_o(z,p_s,p_r) = -[\, z - \frac{1}{2}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2)\,]^{-1}$

wobei z in Analogie zum nichtrelativistischen Fall gewählt wurde, wo es für $E + i\varepsilon$ steht. Die Formel für die erste Resolvente entspricht /A2.,14/. In analoger Weise zum nicht-relativistischen Fall läßt sich nun die Lippman-Schwingergleichung herleiten (siehe Abschnitt 12.6)

12.6 Die relativistischen Faddeev-Gleichungen im Dreiteilchenfall

Im folgenden wird analog zum nicht-relativistischen Fall in Anhang 3 vorgegangen. Es werden die Kanalgleichungen für den $\rho = 3$-Fall benutzt, die Resolvente aufgestellt, um sodann die Faddeev-Gleichungen zu berechnen. Im vorliegenden Fall bekommt man:

$$
\begin{aligned}
&[\Box_1 + \kappa_1^2 + \Box_2 + \kappa_2^2 + \Box_3 + \kappa_3^2][\Box_1 + \mu_1^2 + \Box_2 + \mu_2^2 + \Box_3 + \mu_3^2]^2 \; \phi_i^2(x_{\alpha_1}^1 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^3 | a) \\
&+ G_{\alpha_1\alpha}(x_1,x)\, 4\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(x',x_2)\; \phi_i^2(x_{\delta}^1 x_{\gamma}^1 x_{\alpha}^2 x_{3}^3 | a) \\
&- G_{\alpha_2\alpha}(x_2,x)\, 4\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_1}(x',x_1)\; \phi_i^2(x_{\delta}^1 x_{\alpha}^1 x_{2}^2 x_{\gamma}^3 | a) \\
&+ G_{\alpha_1\alpha}(x_1,x)\, 4\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_3}(x',x_3)\; \phi_i^2(x_{\delta}^1 x_{\alpha}^2 x_{2}^2 x_{\gamma}^1 | a) \\
&- G_{\alpha_3\alpha}(x_3,x)\, 4\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_1}(x',x_1)\; \phi_i^2(x_{\delta}^1 x_{\alpha}^2 x_{2}^2 x_{\gamma}^1 | a) \\
&+ G_{\alpha_2\alpha}(x_2,x)\, 4\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_3}(x',x_3)\; \phi_i^1(x_{\alpha}^1 x_{\delta}^2 x_{2}^2 x_{\gamma}^3 | a) \\
&- G_{\alpha_3\alpha}(x_3,x)\, 4\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(x',x_2)\; \phi_i^1(x_{\alpha}^1 x_{\delta}^2 x_{2}^2 x_{\gamma}^3 | a) \\
&= 4 \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3=1 \\ \nu_1\neq\nu_2 \\ \nu_1\neq\nu_3 \\ \nu_2\neq\nu_3}}^{3} (-1)^{P_\nu} \int dx^{\nu_1}\, G_{\alpha_{\nu_1}\alpha}(x_{\nu_1},x)\, V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_{\nu_2}}(x',x_{\nu_2})\; \phi_1^{\nu_3}(x_{\delta}^{\nu_1} x_{\gamma}^{\nu_2} x_{\alpha}^{\nu_3} | a)
\end{aligned}
\tag{12.6,1}
$$

Nach Fouriertransformation in die Impulsdarstellung erhält man für diese Gleichung:

$$\{-p_{a_1}^2 - p_{a_2}^2 - p_{a_3}^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2\}\{p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 + p_{a_3}^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2\}^2 \tilde{\Phi}_1(p_{a_1}p_{a_2}p_{a_3}|a)$$

$$= \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \int dq_1 dq_2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{G}_{\alpha_1\alpha}(p_1) \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2) \delta(p_1+p_2-q_1-q_2) \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_3}|a)$$

$$- \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \int dq_1 dq_2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{G}_{\alpha_2\alpha}(p_2) \tilde{F}_{\beta\alpha_1}(-p_1) \delta(p_1+p_2-q_1-q_2) \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_3}|a)$$

$$- \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \int dq_1 dq_2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{G}_{\alpha_1\alpha}(p_1) \tilde{F}_{\beta\alpha_3}(-p_3) \delta(p_1+p_3-q_1-q_2) \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_2}|a)$$

$$+ \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \int dq_1 dq_2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{G}_{\alpha_3\alpha}(p_3) \tilde{F}_{\beta\alpha_1}(-p_1) \delta(p_1+p_3-q_1-q_2) \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_2}|a)$$

$$+ \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \int dq_1 dq_2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{G}_{\alpha_2\alpha}(p_2) \tilde{F}_{\beta\alpha_3}(-p_3) \delta(p_2+p_3-q_1-q_2) \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_1}|a)$$

$$- \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \int dq_1 dq_2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{G}_{\alpha_3\alpha}(p_3) \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2) \delta(p_2+p_3-q_1-q_2) \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_1}|a)$$

$$= \frac{4}{2}(2\pi)^{-4} L^2 \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \int dq_1 dq_2 \sum_{\nu_1\nu_2\nu_3} (-1)^{P_\nu} \delta(p_{\nu_1}+p_{\nu_2}-q_1-q_2) \cdot$$

$$\cdot \tilde{G}_{\alpha_{\nu_1}\alpha}(p_{\nu_1}) \tilde{F}_{\beta\alpha_{\nu_2}}(-p_{\nu_2}) \tilde{\Phi}_1^{\nu_3}(q_\delta q_\gamma p_{a_{\nu_3}}|a) \qquad (12.6,2)$$

Division durch die Resolvente ergibt analog zum Abschnitt über die relativistische Lippmann-Schwingergleichung im Zweiteilchenfall:

$$\tilde{\Phi}_1(p_{a_1}p_{a_2}p_{a_3}|a) = g_o \{\hat{V}_3 \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_3}|a) + \hat{V}_2 \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_2}|a) + \hat{V}_1 \tilde{\Phi}_1(q_\delta q_\gamma p_{a_1}|a)\} \qquad (12.6,3)$$

mit $g_o^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} (i\varepsilon - p'^2_{a_1} - p'^2_{a_2} - p'^2_{a_3} + \kappa_1'^2 + \kappa_2'^2 + \kappa_3'^2)^{-1} (i\varepsilon - p'^2_{a_1} - p'^2_{a_2} - p'^2_{a_3} + \mu_1'^2 + \mu_2'^2 + \mu_3'^2)^{-2}$

Die Kanalresolvente wird definiert als

$$G_\alpha(z) = [-z + K_o + K_\alpha]^{-1} \qquad \text{mit } 1 \leq \alpha \leq 3 \qquad (12.6,4)$$

wobei die einzelnen K_α bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
K_1\ \tilde{\varphi}_1^1(p_s,p_r,p_u) &= \hat{V}_1\ \tilde{\Phi}_1(p_s,0,p_u)\\
K_2\ \tilde{\varphi}_1^2(p_s,p_r,p_u) &= \hat{V}_2\ \tilde{\Phi}_1(p_s,0,p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_3\ \tilde{\varphi}_1^3(p_s,p_r,p_u) &= \hat{V}_3\ \tilde{\Phi}_1(p_s,0,-p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_1\ \tilde{\varphi}_2^1(p_s,p_r,p_u) &= \hat{V}_1\ \tilde{\Phi}_2(p_s,0,p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_1\ \tilde{\varphi}_3^1(p_s,p_r,p_u) &= \hat{V}_1\ \tilde{\Phi}_3(p_s,0,-p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_2\ \tilde{\varphi}_2^2(p_s,p_r,p_u) &= -\hat{V}_2\ \tilde{\Phi}_1(p_s,0,p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_3\ \tilde{\varphi}_2^3(p_s,p_r,p_u) &= -\hat{V}_2\ \tilde{\Phi}_3(p_s,0,-p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_2\ \tilde{\varphi}_3^2(p_s,p_r,p_u) &= -\hat{V}_2\ \tilde{\Phi}_1(p_s,0,p_r-\tfrac{1}{2}p_u)\\
K_3\ \tilde{\varphi}_3^3(p_s,p_r,p_u) &= \hat{V}_3\ \tilde{\Phi}_1(p_s,0,-p_r-\tfrac{1}{2}p_u)
\end{aligned} \qquad (12.6,5)$$

Insofern kann auch eine Gesamtresolvente definiert werden mit:

$$g(z) = [\, -z+K_o+\sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha \,]^{-1} \qquad (12.6,6)$$

Will man eine Faddeev-Gleichung für die Zustände aufstellen, so geht man folgendermaßen vor: Man setzt Gleichung /A3.5,16/ in Gleichung /A3.,20/ein u. erhält unter Beachtung von /A3.5,17/ die folgende Gleichung:

$$|\Psi_{\alpha\beta}\rangle^{\pm} = \sum_{i=1}^{3} |\Psi_{\alpha\beta}\rangle_i^{\pm} = \sum_{i=1}^{3} [\, \delta_{i\alpha} |\phi_{\alpha\beta}\rangle + \sum_{j=1}^{3} \lim_{\varepsilon\to 0} g_o F_{ij} |\Psi_{\alpha\beta}\rangle_j^{\pm} \,]$$

$$= (\delta_{1\alpha}+\delta_{2\alpha}+\delta_{3\alpha})\,|\phi_{\alpha\beta}\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0} g_o \{F_{11}+F_{21}+F_{31}\}|\Psi_\alpha\rangle_1^{\pm} + \lim_{\varepsilon\to 0} g_o \{F_{12}+F_{22}+F_{32}\}|\Psi_\alpha\rangle_2^{\pm} + \lim_{\varepsilon\to 0} g_o \{F_{13}+F_{23}+F_{33}\}|\Psi_\alpha\rangle_3^{\pm} \qquad (12.6,7)$$

und unter Anwendung von /A3.5,9/ und /A3.5,10/

$$|\Psi_{\alpha\beta}\rangle^{\pm} = (\delta_{1\alpha}+\delta_{2\alpha}+\delta_{3\alpha})\,|\phi_{\alpha\beta}\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0} g_o \{2t_1 |\Psi_{\alpha\beta}\rangle_1^{\pm} + 2t_2 |\Psi_{\alpha\beta}\rangle_2^{\pm} + 2t_3 |\Psi_{\alpha\beta}\rangle_3^{\pm}\}$$

$$\text{mit } t_i = (1 - \Psi_i g_o)^{-1} \Psi_i \qquad (12.6,8)$$

für $\alpha = 1,2,3$ d.h. für alle möglichen Kanäle. Mit der Resolventengleichung /A3.,17/, eingesetzt in /A3.,15/, erhält man die der Lippmann-Schwinger-Gleichung analoge Gleichung:

$$|\Psi_{\alpha\beta}\rangle^{+} = |\Psi_{\alpha\beta}\rangle^{-} + \lim_{\varepsilon\to 0} (\, G(+i\varepsilon) - G(-i\varepsilon)\,)\,\bar{\delta}_\alpha\, |\phi_{\alpha\beta}\rangle \qquad (12.6,9)$$

und die S-Matrix lautet sodann:

$$S_{\alpha\beta,\beta n} = {}^{-}\!\langle \Psi_{\beta n} | \Psi_{\alpha\beta}\rangle^{-} - \lim_{\varepsilon\to 0} (\, G^{+} - G^{-})\, {}^{-}\!\langle \Psi_{\beta n} |\, \bar{\delta}_\alpha\, |\phi_{\alpha\beta}\rangle \qquad (12.6,10)$$

Die R-Matrix ist dann durch

$$R^{-}_{\alpha\beta,\beta n} = {}^{-}\!\langle \Psi_{\beta n} |\, \bar{\delta}_\alpha\, |\phi_{\alpha\beta}\rangle \qquad (12.6,11)$$

bzw. unter Benutzung von /12.6,9/ durch

$$R^{+}_{\alpha\beta,\beta n} = \langle \phi_{\beta n} |\, \bar{\delta}_\alpha\, |\Psi_{\alpha\beta}\rangle^{+} \qquad (12.6,11')$$

gegeben.

Benutzt man wiederum /A3.,19/, so erhält man

$$R^{-}_{\alpha\beta,\beta n} = \langle \phi_{\beta n} |\, \bar{\delta}_\alpha + \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\delta}_\beta\, G^{+}\, \bar{\delta}_\alpha\, |\phi_{\alpha\beta}\rangle \qquad (12.6,12)$$

$$R^{+}_{\alpha\beta,\beta n} = \langle \phi_{\beta n} |\, \bar{\delta}_\beta + \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\delta}_\beta\, G^{+}\, \bar{\delta}_\alpha\, |\phi_{\alpha\beta}\rangle \qquad (12.6,12')$$

wobei beide R-Matrizen äquivalent sind, da sie sich nur im ‚off-shell'-Anteil unterscheiden.

12.7 Die U-Matrix im Dreiteilchenfall

Zusammmenfassend lassen sich die Gleichungen aufstellen:

$$R^{+}_{\beta n,\alpha m} = \langle \phi_{\beta n} | \; U^{+}_{\beta\alpha}(z) \; | \phi_{\alpha m} \rangle \qquad (12.7,1)$$

$$R^{-}_{\beta n,\alpha m} = \langle \phi_{\beta n} | \; U^{-}_{\beta\alpha}(z) \; | \phi_{\alpha m} \rangle \qquad (12.7,1')$$

wobei z.B. $U^{+}_{\beta\alpha} = \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} + \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} \sum_{\delta\neq\alpha} G \, \Psi_{\delta}$ bzw. mit der Resolventengleichung

$$U^{+}_{\beta\alpha} = \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} + \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} \sum_{\delta\neq\alpha} (g_{\delta} + G \, \bar{\mathfrak{V}}_{\delta} \, g_{\delta}) \, \Psi_{\delta} \qquad \beta,\alpha = 0,1,2,3 \qquad (12.7,2)$$

und $$\bar{\mathfrak{V}}_{\alpha} = \mathfrak{V} - \Psi_{\alpha} = \sum_{\gamma\neq\alpha} \Psi_{\gamma} \qquad (12.7,3)$$

Diese Operatorgleichung wird durch die erste Padéapproximation $f^{[1,1]}$ angenähert:

$$U^{+}_{\beta\alpha} = \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} + \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} \sum_{\delta\neq\alpha} \frac{\Psi_{\delta}}{1 - \bar{\mathfrak{V}}_{\delta} g_{\delta}} \approx \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} + \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} \sum_{\delta\neq\alpha} \Psi_{\delta} \, (1 + \bar{\mathfrak{V}}_{\delta} g_{\delta}) \qquad (12.7,4)$$

In erster quasi-Bornscher Näherung erhält man:

$$U^{+}_{\beta\alpha} = \bar{\mathfrak{V}}_{\beta} \qquad (12.7,5)$$

Die approximierte R-Matrix lautet dann:

$$R^{-}_{\beta\alpha} = \langle \phi_{\beta} | \; \bar{\mathfrak{V}}_{\alpha} \; | \phi_{\alpha} \rangle \qquad (12.7,6)$$

Ist der Anfangszustand so präpariert, daß das dritte Teilchen frei ist, so ergibt sich:

$$^{1}qBR^{-}_{\beta 3} = \langle \phi_{\beta} | \; \bar{\mathfrak{V}}_{3} \; | \phi_{3} \rangle = \langle \phi_{\beta} | \; \Psi_{1} + \Psi_{2} \; | \phi_{3} \rangle \qquad (12.7,7)$$

Ist das erste Teilchen frei, dann erhält man:

$$^{1}qBR^{-}_{\beta} = \langle \phi_{\beta} | \; \bar{\mathfrak{V}}_{1} \; | \phi_{1} \rangle = \langle \phi_{\beta} | \; \Psi_{3} + \Psi_{2} \; | \phi_{1} \rangle \qquad (12.7,8)$$

Für den Fall, daß das zweite Teilchen frei ist, ergeben sich folgende Wechselwirkungsgleichungen, bei denen die Clusterzerlegung

$$| \phi(NB) \rangle = | \phi(N) \rangle \; \boxtimes \; | \phi(B) \rangle \qquad \text{bzw.}$$

$$\phi\left(\begin{smallmatrix} \times & \times & \times \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{smallmatrix} | BN\right) = \frac{1}{2} \sum_{\psi_1\psi_2\psi_3} (-1)^{P_{\psi}} \phi\left(\begin{smallmatrix} \times \\ \alpha \\ \psi_1 \end{smallmatrix} | N\right) \; \phi\left(\begin{smallmatrix} \times & \times \\ \alpha & \alpha \\ \psi_2 & \psi_3 \end{smallmatrix} | B\right) \quad \text{oder}$$

$$\phi\left(\begin{smallmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{smallmatrix} | BN\right) = \frac{1}{2} \sum_{\psi_1\psi_2\psi_3} (-1)^{P_{\psi}} \phi\left(\begin{smallmatrix} P_{\psi_1} \\ \alpha \\ \psi_1 \end{smallmatrix} | N\right) \; \phi\left(\begin{smallmatrix} P_{\psi_2} & P_{\psi_3} \\ \alpha & \alpha \\ \psi_2 & \psi_3 \end{smallmatrix} | B\right) \qquad (12.7,9)$$

berücksichtigt werden muß:

$$\tilde{\Phi}_1^{\pm}\left(\begin{matrix}p_1 & p_2 & p_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix}\middle|{}^{BN}_{a}\right)$$

$$= + g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{G}_{q_1\alpha}(p_1)\;\tilde{F}_{\beta q_2}(-p_2)\;\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^1\left(\begin{matrix}q_\delta & q_1 & q_2 & p_3\\ \gamma & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix}\middle|{}^{BN}_{a}\right)$$

$$- g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{G}_{q_2\alpha}(p_2)\;\tilde{F}_{\beta q_1}(-p_1)\;\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^1\left(\begin{matrix}q_\delta & q_1 & q_2 & p_3\\ \gamma & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix}\middle|{}^{BN}_{a}\right)$$

$$- g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{G}_{q_2\alpha}(p_2)\;\tilde{F}_{\beta q_3}(-p_3)\;\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^2\left(\begin{matrix}q_\delta & q_1 & q_2 & p_1\\ \gamma & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1\end{matrix}\middle|{}^{BN}_{a}\right)$$

$$+ g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\tilde{G}_{q_3\alpha}(p_3)\;\tilde{F}_{\beta q_2}(-p_2)\;(p_2+p_3-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^2\left(\begin{matrix}q_\delta & q_1 & q_2 & p_1\\ \gamma & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1\end{matrix}\middle|{}^{BN}_{a}\right)$$

(12.7,10)

Berücksichtigt man /12.7,9/ und beachtet, daß die Gleichungen in q_1 und q_2 antisymmetrisch sind - wie aus der Projektion auf eine Zustand $<BN|$ sichtbar ist -, dann folgt

$$= + g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_1\alpha}(p_1)\;\tilde{F}_{\beta q_2}(-p_2)\;\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^1(q_\delta)\;\tilde{\Phi}_1^1\left(\begin{matrix}q_\gamma & p_3\\ \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix}\right)$$

$$+ g_o^{\pm}\frac{4}{4}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_1\alpha}(p_1)\;\tilde{F}_{\beta q_2}(-p_2)\;\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^1(p_{\alpha_3})\;\tilde{\Phi}_1^1\left(\begin{matrix}q_\delta & q_\gamma\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\right)$$

$$- g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_2\alpha}(p_2)\;\tilde{F}_{\beta q_1}(-p_1)\;\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^1(q_\delta)\;\tilde{\Phi}_1^1\left(\begin{matrix}q_\gamma & p_3\\ \alpha_2 & \alpha_3\end{matrix}\right)$$

$$- g_o^{\pm}\frac{4}{4}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_2\alpha}(p_2)\;\tilde{F}_{\beta q_1}(-p_1)\;\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^1(p_{\alpha_3})\;\tilde{\Phi}_1^1\left(\begin{matrix}q_\delta & q_\gamma\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\right)$$

$$- g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_2\alpha}(p_2)\;\tilde{F}_{\beta q_3}(-p_3)\;\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^2(q_\delta)\;\tilde{\Phi}_1^2\left(\begin{matrix}q_\gamma & p_2\\ \alpha_2 & \alpha_1\end{matrix}\right)$$

$$- g_o^{\pm}\frac{4}{4}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_2\alpha}(p_2)\;\tilde{F}_{\beta q_3}(-p_3)\;\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^2(p_{\alpha_1})\;\tilde{\Phi}_1^2\left(\begin{matrix}q_\delta & q_\gamma\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\right)$$

$$+ g_o^{\pm}\frac{4}{2}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_3\alpha}(p_3)\;\tilde{F}_{\beta q_2}(-p_2)\;\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^2(q_\delta)\;\tilde{\Phi}_1^2\left(\begin{matrix}q_\gamma & p_1\\ \alpha_2 & \alpha_1\end{matrix}\right)$$

$$+ g_o^{\pm}\frac{4}{4}(2\pi)^{-4}L^2\int dq_1\,dq_2\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{G}_{q_3\alpha}(p_3)\;\tilde{F}_{\beta q_2}(-p_2)\;\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\;\tilde{\Phi}_1^2(p_{\alpha_1})\;\tilde{\Phi}_1^2\left(\begin{matrix}q_\delta & q_\gamma\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\right)$$

$$= \Phi_1^{3\,2}\left(\begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \delta & \alpha_3\end{matrix}\right)\Phi_1^{3\,2}\left(\begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \gamma & \alpha_3\end{matrix}\right)$$

(12.7,11)

Hierbei tragen der sechste und der achte Term nicht zur Wechselwirkung bei. Die anderen Terme sehen graphisch folgendermaßen aus (wegen der Antisymmetrie des Vertex wurden dabei drei Vorzeichen verändert; die Zeichen haben dieselbe Bedeutung wie bei den Masseneigenwertgleichungen):

$-\frac{4}{4}$
$+\frac{4}{4}$
$-\frac{4}{2}$
$-\frac{4}{2}$
$+\frac{4}{4}$
$-\frac{4}{4}$
$+\frac{4}{2}$
$+\frac{4}{2}$

Die R-Matrix ist dann gegeben durch:

$$R^{*}_{ab} = -2\pi i \;\delta(p,\kappa,\mu)\; C_1 C_2 C_3 \int dp_1\, dp_2\, dp_3\; \tilde{\sigma}\binom{p_1 p_2 p_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\; \tilde{\phi}_1^{22}(\delta\, \alpha_{31})\; \tilde{\phi}_1^{22}(\gamma\delta\, \alpha_{31})$$

mit

$$\tilde{\sigma}\binom{p_1 p_2 p_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \tilde{\sigma}\binom{p_1}{\alpha_1}\tilde{\sigma}\binom{p_2 p_3}{\alpha_2 \alpha_3} + \tilde{\sigma}\binom{p_2}{\alpha_2}\tilde{\sigma}\binom{p_3 p_1}{\alpha_3 \alpha_1} + \tilde{\sigma}\binom{p_3}{\alpha_3}\tilde{\sigma}\binom{p_1 p_2}{\alpha_1 \alpha_2} \qquad (12.7,12)$$

Ordnet man die einzelnen Terme und faßt zusammen, so erhält man:

$$R^{*}_{ab} = R^{1*}_{ab} + R^{2*}_{ab} + R^{3*}_{ab} + R^{4*}_{ab} + R^{5*}_{ab} + R^{6*}_{ab} + R^{7*}_{ab} + R^{8*}_{ab} \qquad (12.7,13)$$

mit

$$R^{1*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(-\frac{16}{2}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_2}{\alpha_2}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1 p_3}{\alpha_1 \alpha_3}\tilde{G}(p_1)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(-)\,\tilde{\phi}_1\binom{q_1}{\delta}\tilde{\phi}\binom{q_2 p_3}{\gamma\, \alpha_3}$$

$$R^{2*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(+\frac{16}{2}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1}{\alpha_1}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_2 p_3}{\alpha_2 \alpha_3}\tilde{G}(p_1)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}_1\binom{q_1}{\delta}\tilde{\phi}_1\binom{q_2 p}{\gamma\, \alpha}$$

$$R^{3*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(+\frac{16}{4}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}(p_1)\,\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_2 p_3}{\alpha_2 \alpha_3}\tilde{G}(p_1)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}\binom{p_3}{\alpha_3}\tilde{\phi}_1\binom{q_1 q_2}{\delta\, \gamma}$$

$$R^{4*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(-\frac{16}{4}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_2}{\alpha_2}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1 p_3}{\alpha_1 \alpha_3}\tilde{G}(p_1)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}\binom{p_3}{\alpha_3}\tilde{\phi}_1\binom{q_1 q_2}{\delta\, \gamma}$$

$$R^{5*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(-\frac{8}{2}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_3}{\alpha_3}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1 p_2}{\alpha_1 \alpha_2}\tilde{G}(p_1)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}\binom{q_1}{\delta}\tilde{\phi}_1\binom{q_2 p_3}{\gamma\, \alpha_3}$$

$$R^{6*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(+\frac{8}{2}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1}{\alpha_1}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_2 p_3}{\alpha_2 \alpha_3}\tilde{G}(p_3)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}\binom{q_1}{\delta}\tilde{\phi}_1\binom{q_2 p_1}{\gamma\, \alpha_1}$$

$$R^{7*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(+\frac{8}{4}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_3}{\alpha_3}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1 p_2}{\alpha_1 \alpha_2}\tilde{G}(p_1)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}\binom{p_3}{\alpha_3}\tilde{\phi}_1\binom{q_1 q_2}{\delta\, \gamma}$$

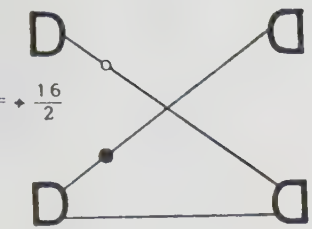
$$R^{8*}_{ab} = \overline{C}_1 \left(-\frac{8}{4}\right)\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\; \tilde{\sigma}^{*}\binom{p_1}{\alpha_1}\tilde{\sigma}^{*}\binom{p_2 p_3}{\alpha_2 \alpha_3}\tilde{G}(p_3)\tilde{F}(-p_2)\,\delta(p_2+p_3-q_1-q_2)\,\tilde{\phi}\binom{p_1}{\alpha_1}\tilde{\phi}_1\binom{q_1 q_2}{\delta\, \gamma}$$

mit

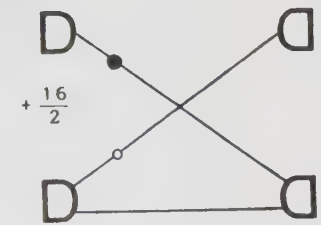
$$\overline{C}_1 = 2\pi i\; \frac{\delta(p'_{a_1} + p'_{a_2} + p'_{a_3} - \kappa'_1 - \kappa'_2 - \kappa'_3)}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2)^2}\; C_1 C_2 C_3\; (2\pi)^{-4}\, L^2\, \overline{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (12.7,14)$$

Die einzelnen Terme werden in der folgenden Figur dargestellt und im folgenden Abschnitt berechnet.

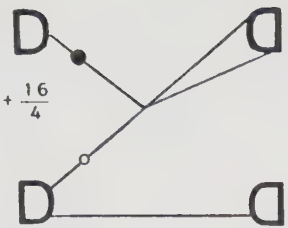
Abbildung 16



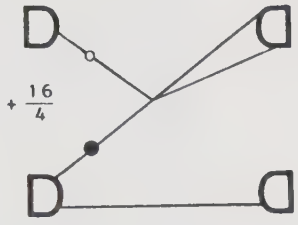
(1)



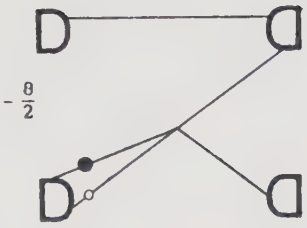
(2)



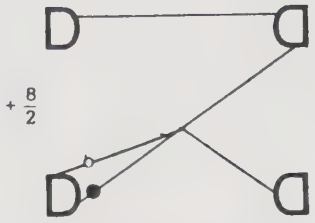
(3)



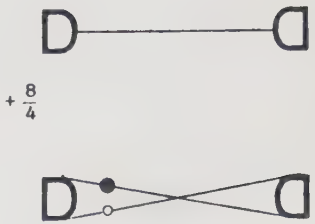
(4)



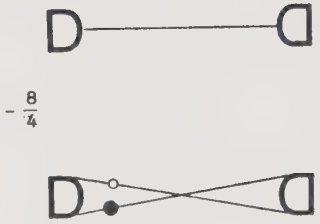
(5)



(6)



(7)



(8)

Für /12.7,13/ erhält man in der niedrigsten Näherung (Bornsche Näherung; siehe /12.3,4/) schließlich:

$$R^*_{ab} = \bar{C}_1^{\,2} \int dp_1 dp_2 dp_3 dq_1 dq_2 \, \tilde{\sigma}(p_{\alpha_1}1)\,\tilde{\sigma}(p_{\alpha_2}2)\,\tilde{\sigma}(p_{\alpha_3}3)\,[\hat{G}(p_1)\hat{F}(-p_2) - \hat{G}(p_2)\hat{F}(-p_1)]$$

$$\cdot\, \tilde{\phi}(q_{\beta_1}1)\,\tilde{\phi}(q_{\beta_2}2)\,\tilde{\phi}(p_{\beta_3}3)$$

(12.7,15)

Unter Beachtung von /9.3.3,1/ erhält man schließlich für die Wirkungsquerschnitte in Anlehnung an die Nukleon-Nukleon-Streuung :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{64^2 \; M^2(a,b) \; (\kappa^2+\mu^2)^2 \; L^8 \; 32}{(2\pi)^{13} \quad 9 \quad (\kappa+\mu)^8 \quad 81} \quad \frac{(s-2\kappa^2)^2 + 4\kappa^4 + \kappa^2 t}{s^2 \quad (s-4\kappa^2)} \quad \theta(\sqrt{s} - m_{\pi^\pm})$$

und

$$\sigma(s) = \frac{64^2 \; 32 \; M^2(a,b) \; (\kappa^2+\mu^2)^2 \; L^4}{(2\pi)^{13} \quad (\kappa+\mu)^8 \; 9 \quad 81} \quad (\sqrt{s} - m_{\pi^\pm}) \quad \left(1 - 3.5\frac{\kappa^2}{s} + 6\frac{\kappa^4}{s^2}\right)$$

(12.7,16)

Die Ergebnisse dieser Berechnung werden auf den folgenden Seiten mit den Experimentalwerten verglichen.

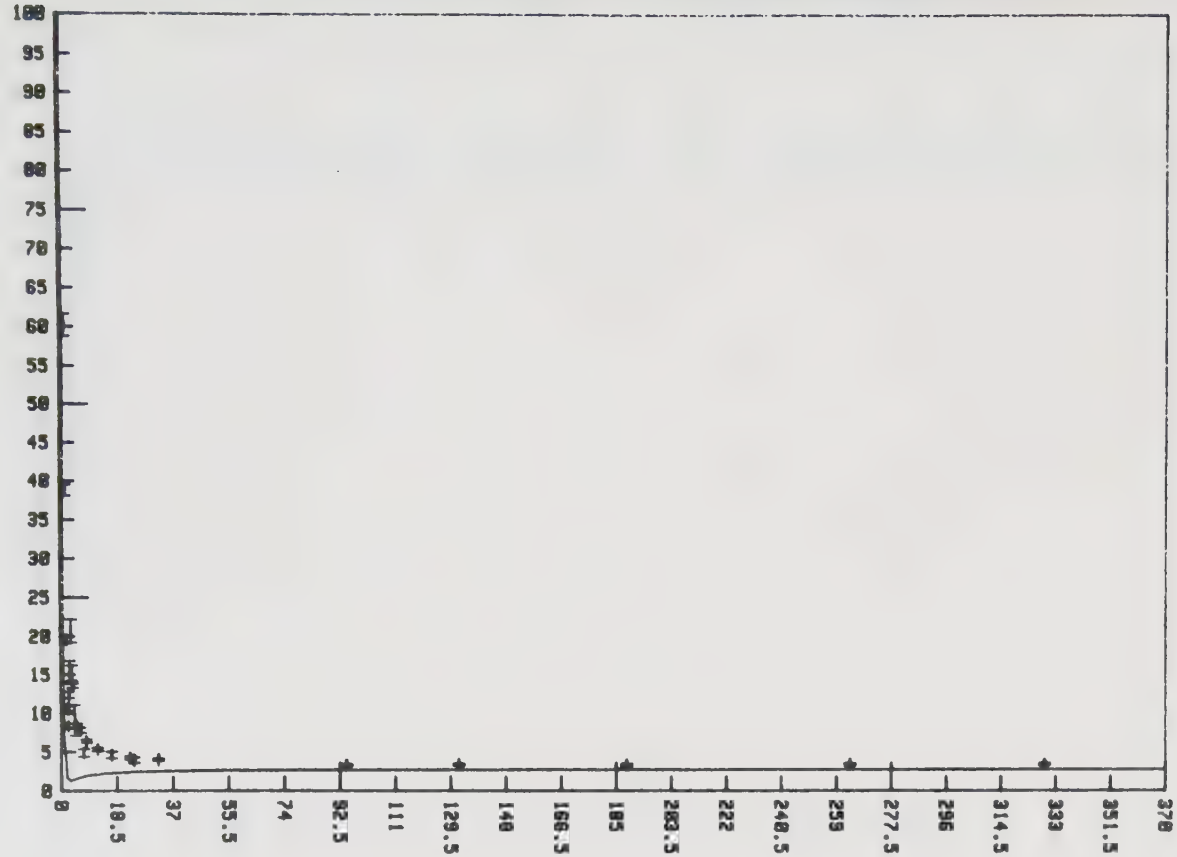
$M(a,b) = 2$ für $p\,\pi^{\pm} \to p\,\pi^{\pm}$

$$= T^{b}_{\alpha_3} * [\tau_{\alpha_3\gamma}(l_a), \tau^{+}_{\gamma\delta}(l_b)]\; T^{a}_{\gamma}$$

Auch in diesem Falle erhält man die beste Anpassung an das Experiment bei der kleinsten Geistermasse.

Graph 6a

Pion +___Proton-Streuung

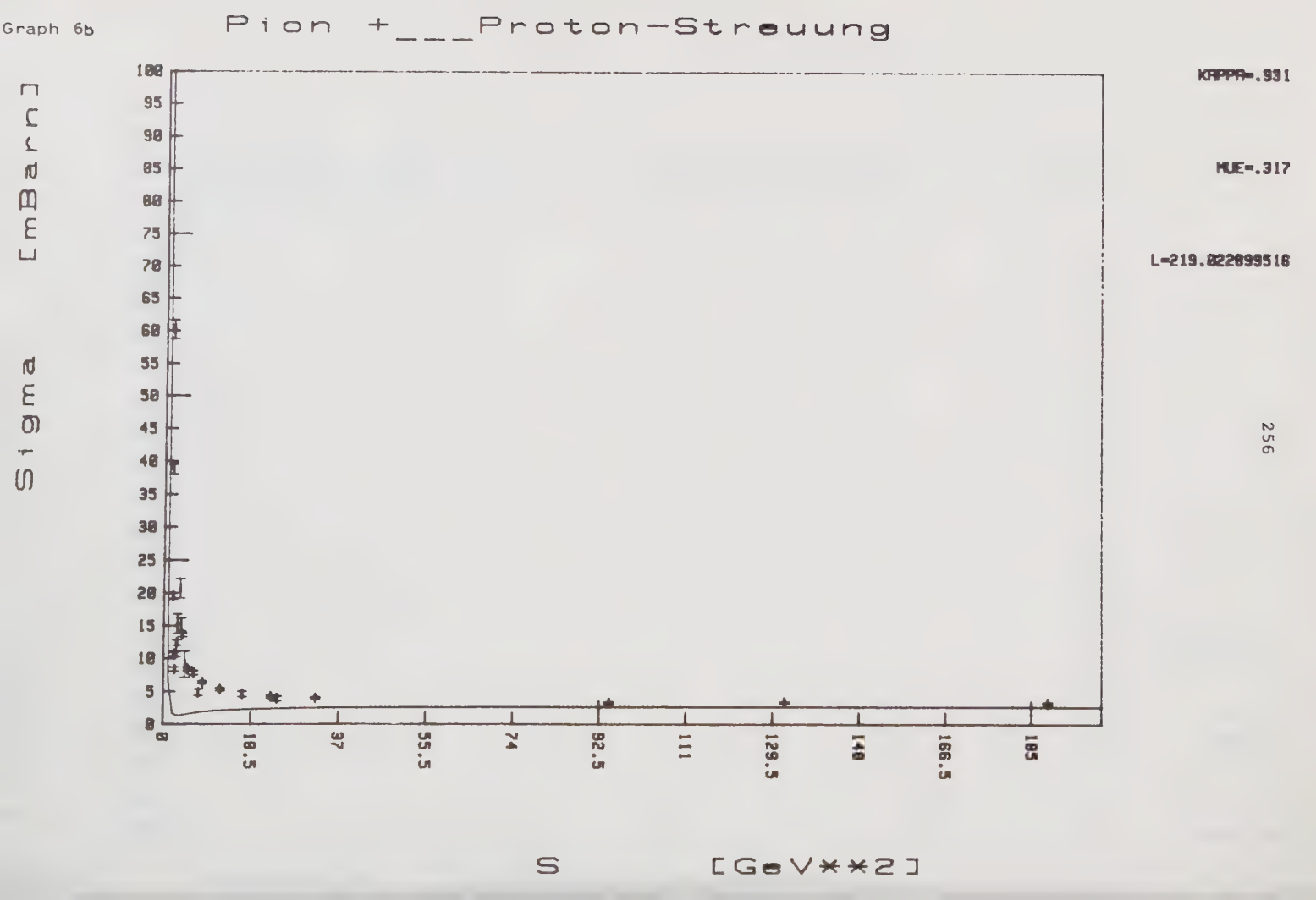


KAPPA=.931

MUE=.317

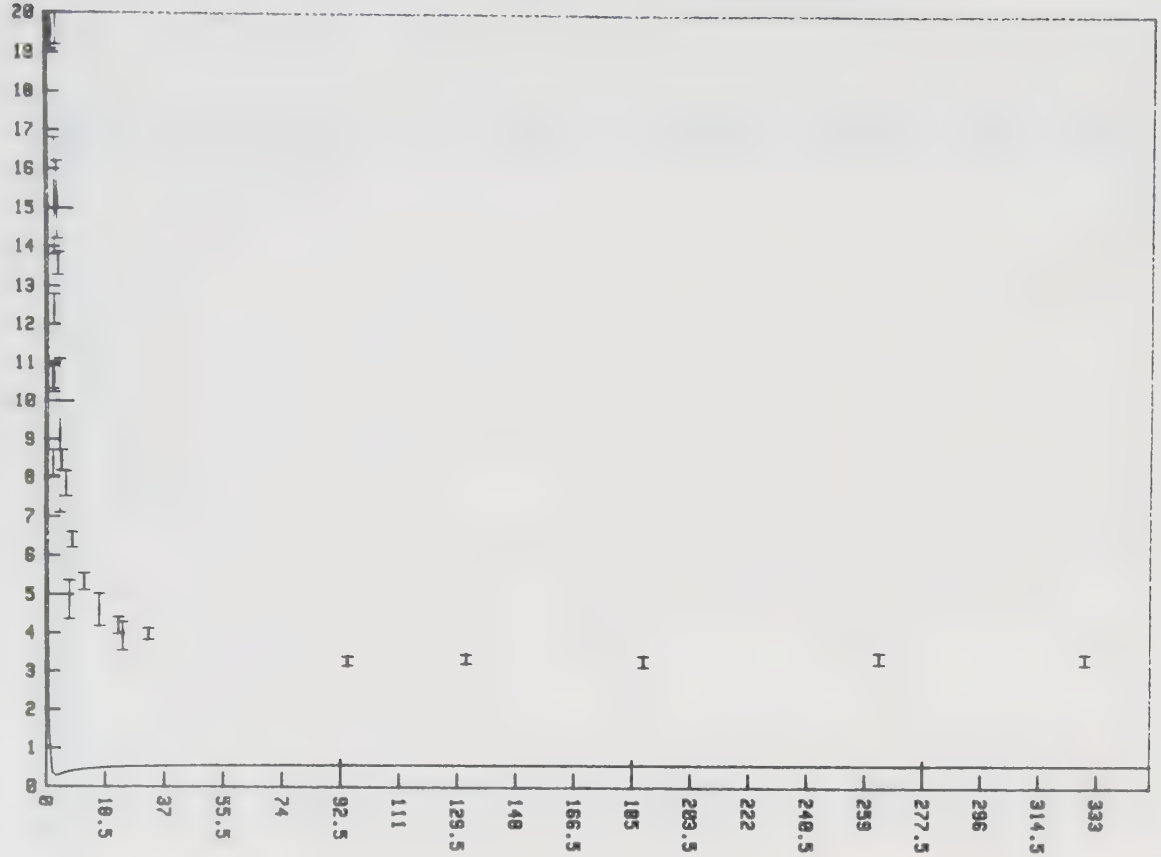
L=219.022699516

Graph 6b


Pion +___Proton-Streuung
Sigma [mBarn]
S [GeV**2]
KAPPA=.991
MUE=.317
L=219.022099518
256
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
18.5
37
55.5
74
92.5
111
129.5
148
166.5
185

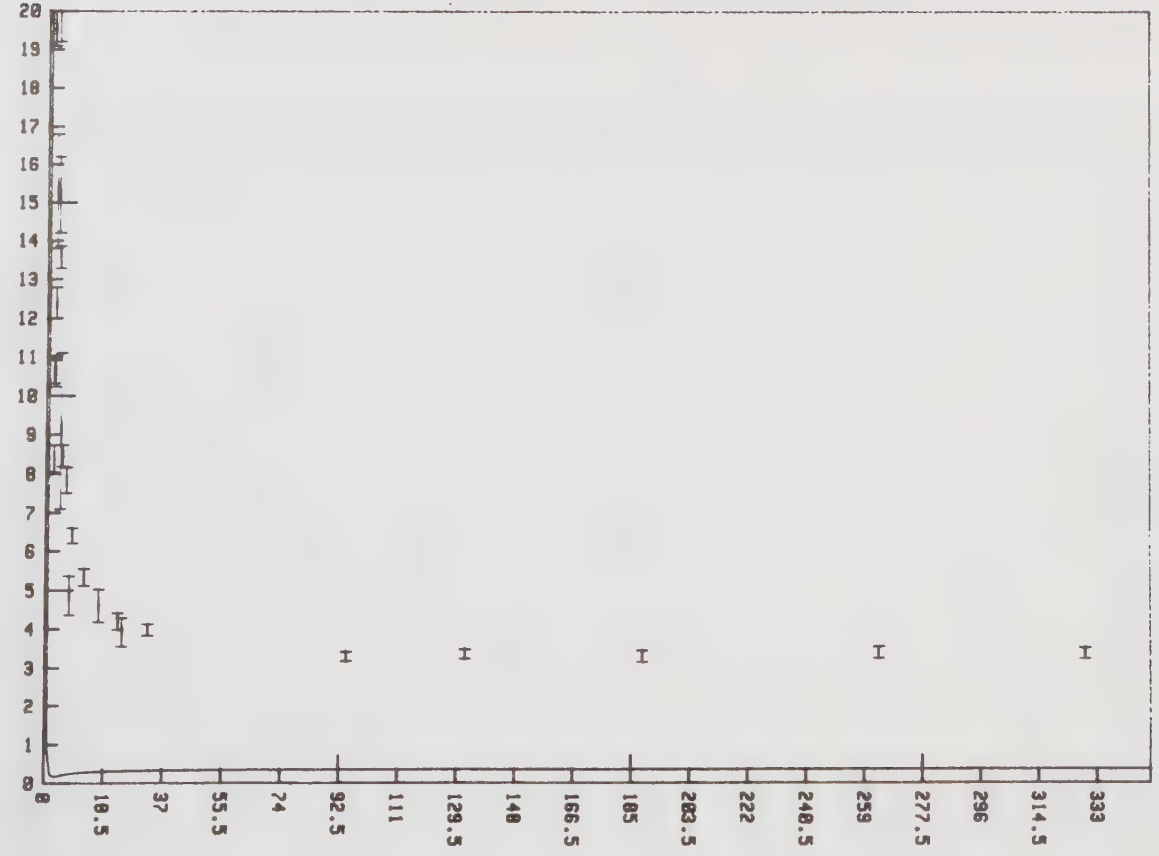
Graph 6c

Pion +___Proton-Streuung



Graph 6d

Pion +___Proton-Streuung

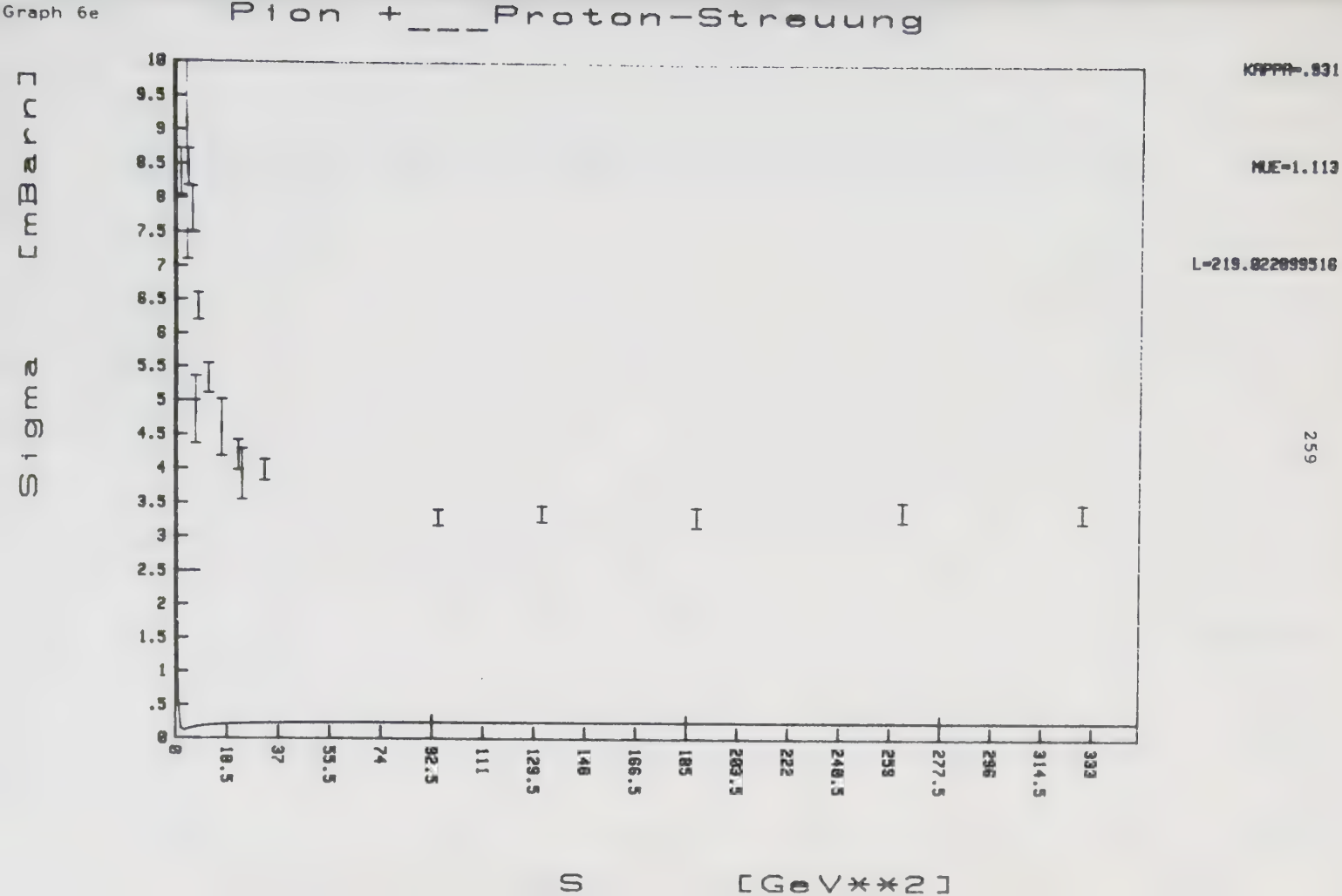


KAPPA=.931

MUE=.9310000001

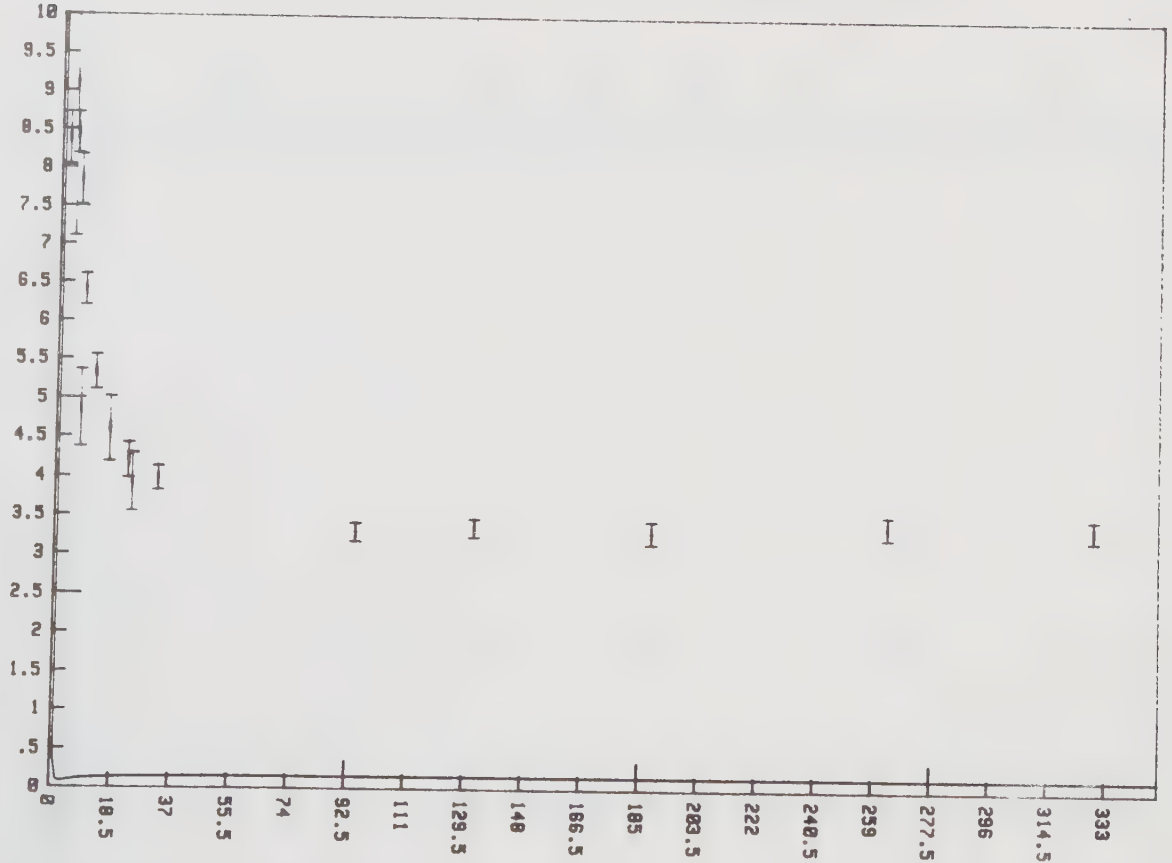
L=219.022099518

Graph 6e


Pion +___Proton-Streuung
Sigma [mBarn]
S [GeV**2]
KAPPA=.831
MUE=1.113
L=219.822899516
10
9.5
9
8.5
8
7.5
7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
.5
0
0
18.5
37
55.5
74
92.5
111
129.5
148
166.5
185
203.5
222
240.5
259
277.5
296
314.5
333

Graph 6f

Pion +___Proton-Streuung



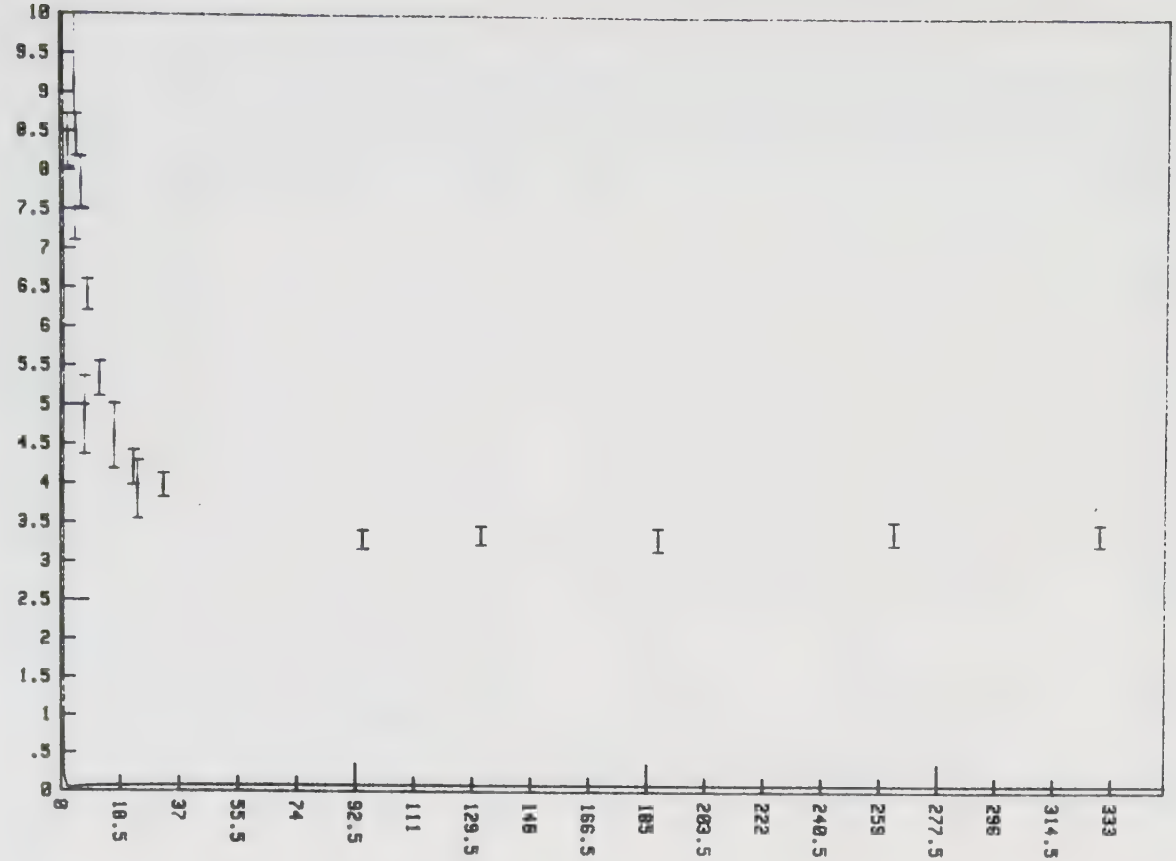
KAPPA=.931

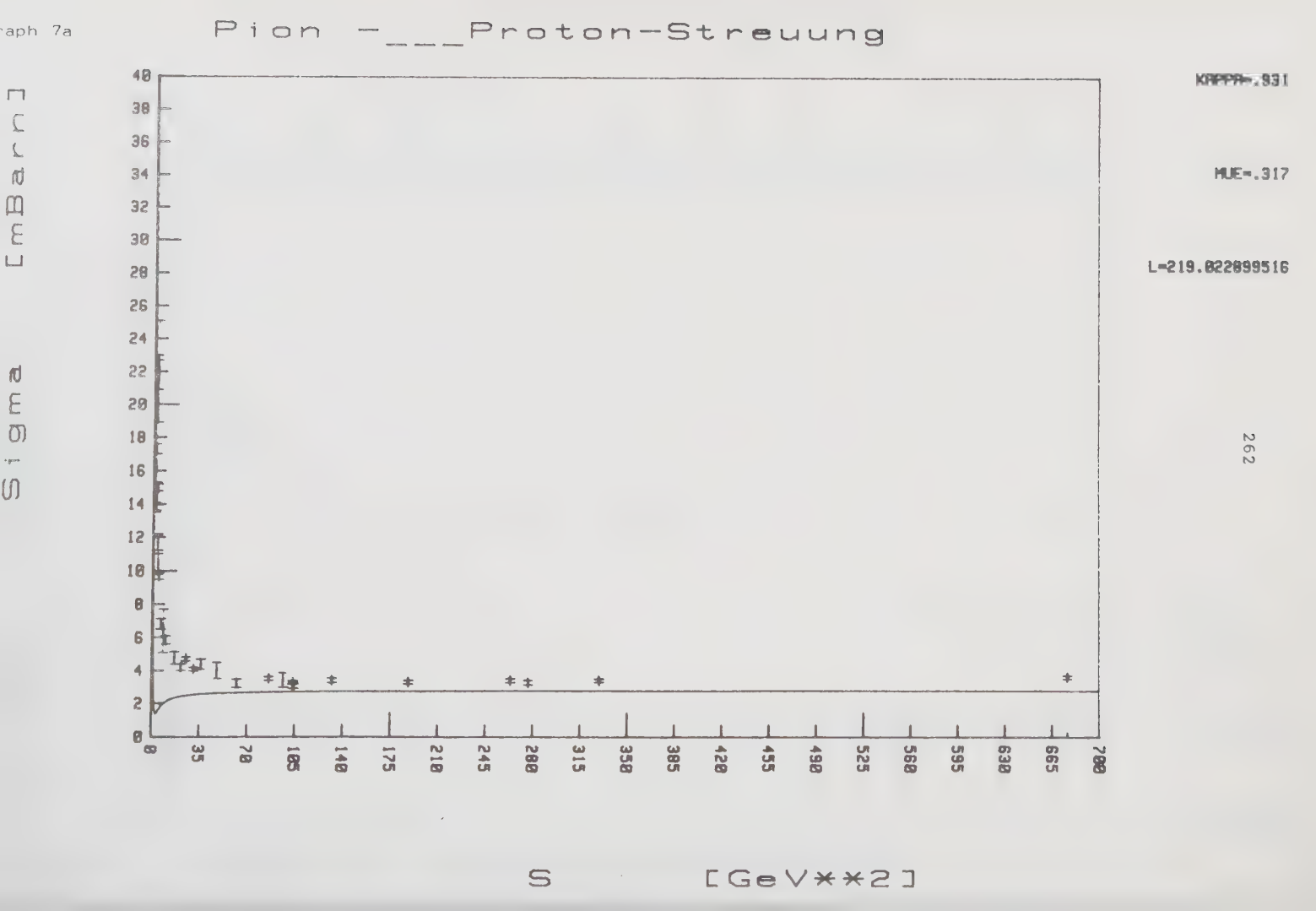
MUE=1.399

L=219.822099516

Graph 6g

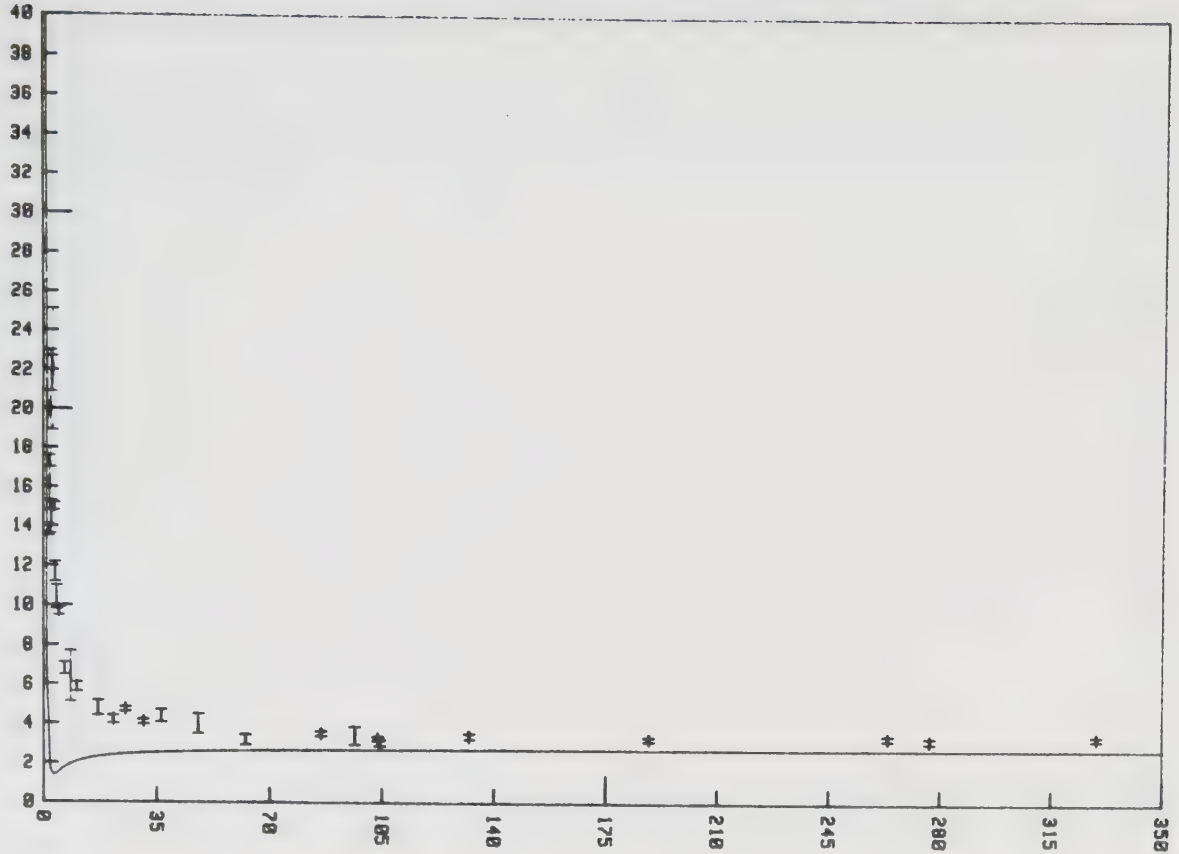
Pion +___Proton-Streuung




Pion -___Proton-Streuung
Sigma [mBarn]
KAPPA=.931
MUE=.317
L=219.022899516
262
S [GeV**2]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
0
35
70
105
140
175
210
245
280
315
350
385
420
455
490
525
560
595
630
665
700

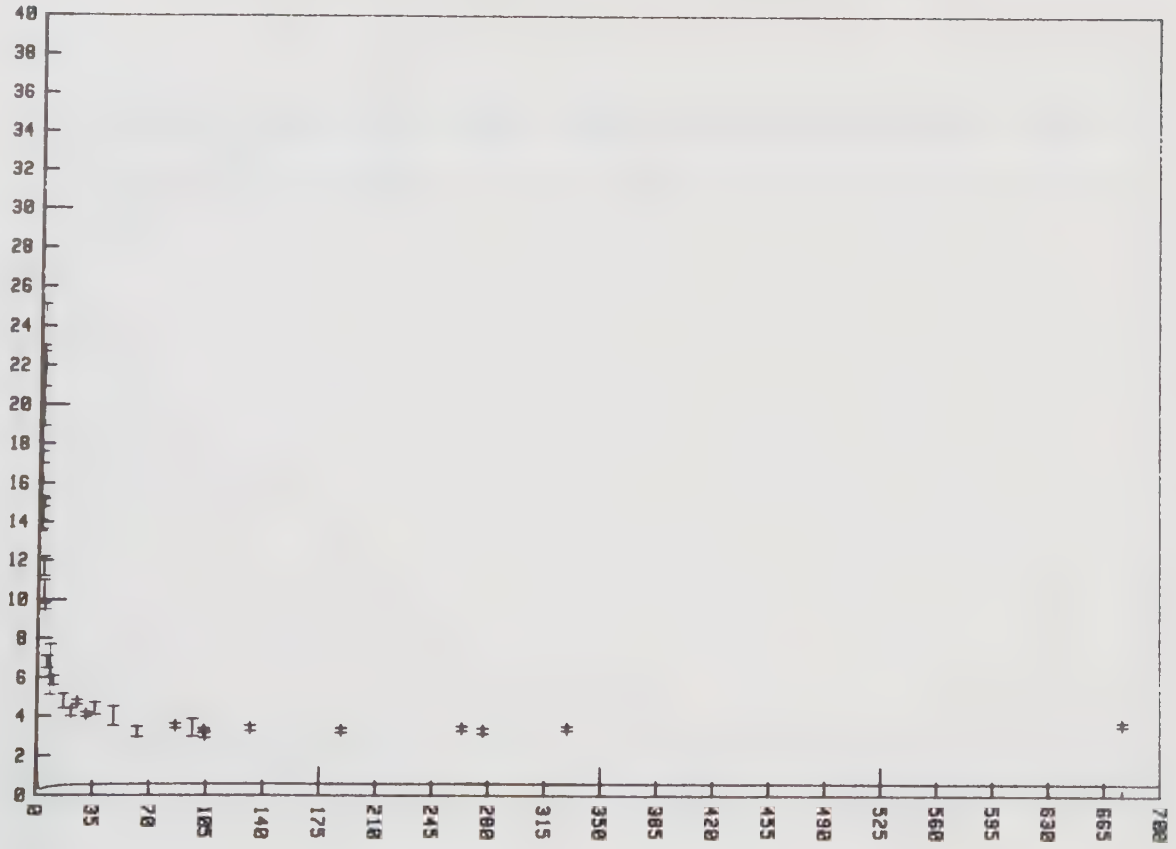
Graph 7b

Pion -___Proton-Streuung

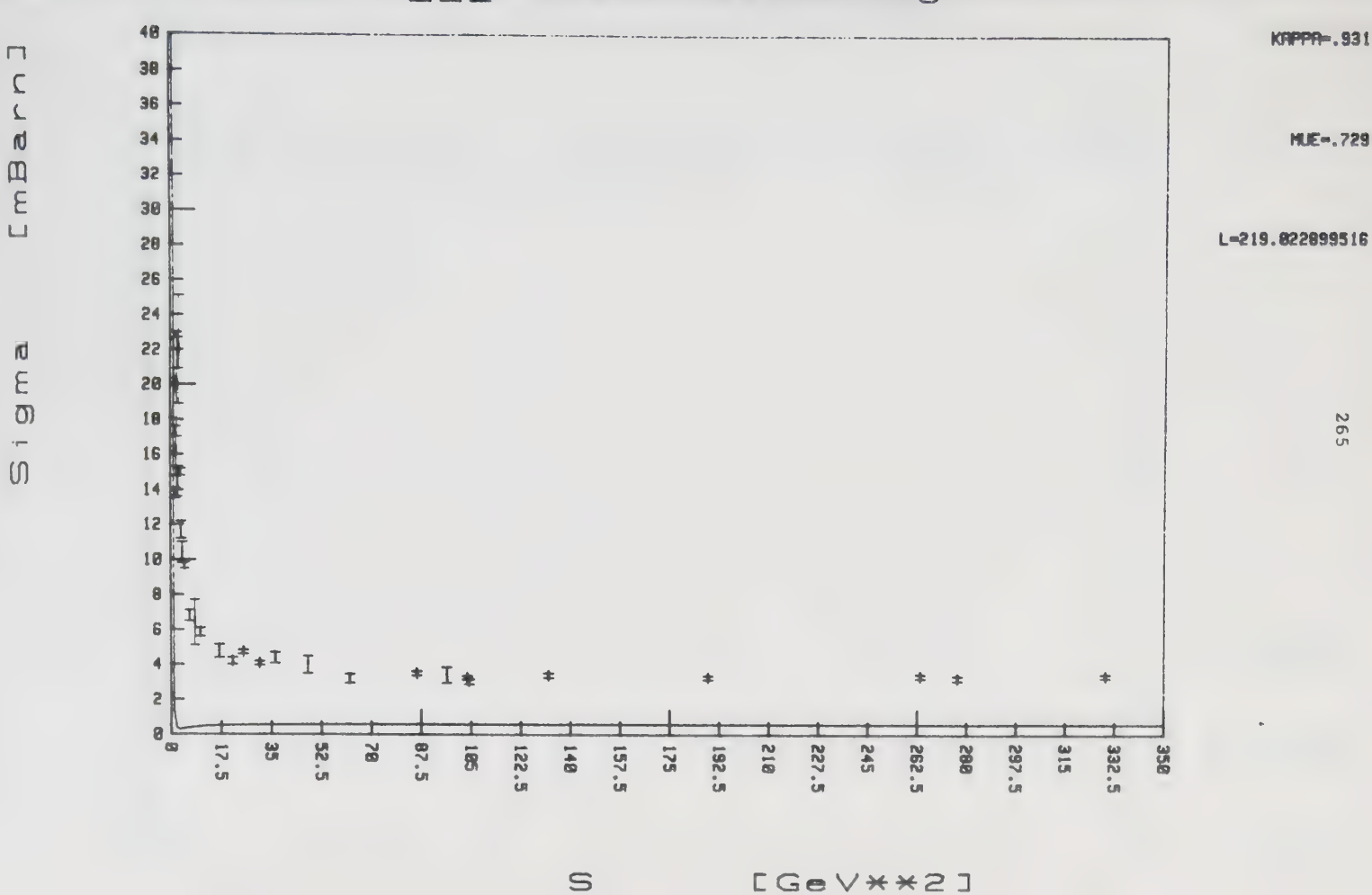


Graph 7c

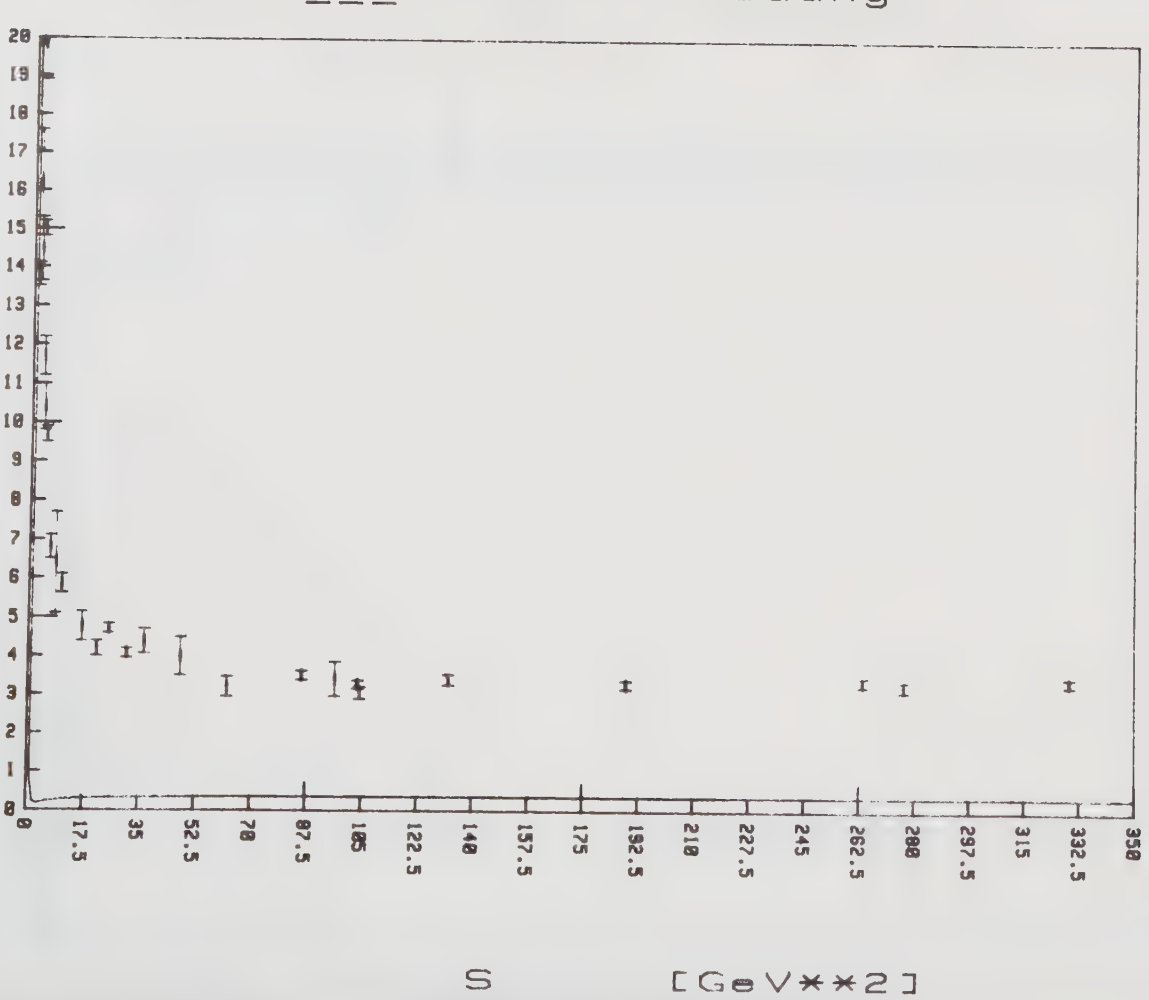
Pion -___Proton-Streuung



Graph 7d

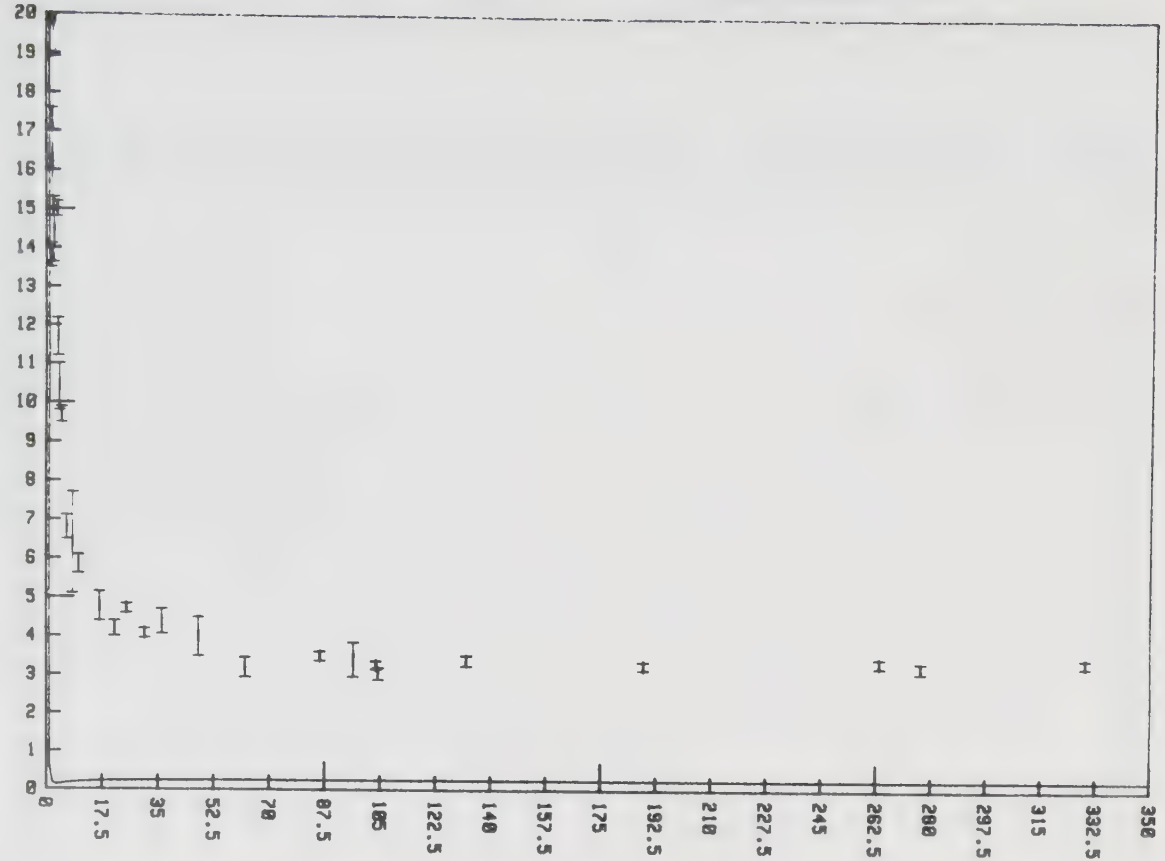

Pion -___Proton-Streuung
Sigma [mBarn]
S [GeV**2]
KAPPA=.931
MUE=.729
L=219.822899516
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
0
17.5
35
52.5
70
87.5
105
122.5
140
157.5
175
192.5
210
227.5
245
262.5
280
297.5
315
332.5
350

Graph 7e


Pion -___Proton-Streuung
Sigma [mBarn]
KAPPA=.931
MUE=.931000001
L=219.022099516
266
S [GeV**2]
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
0
17.5
35
52.5
70
87.5
105
122.5
140
157.5
175
192.5
210
227.5
245
262.5
280
297.5
315
332.5
350

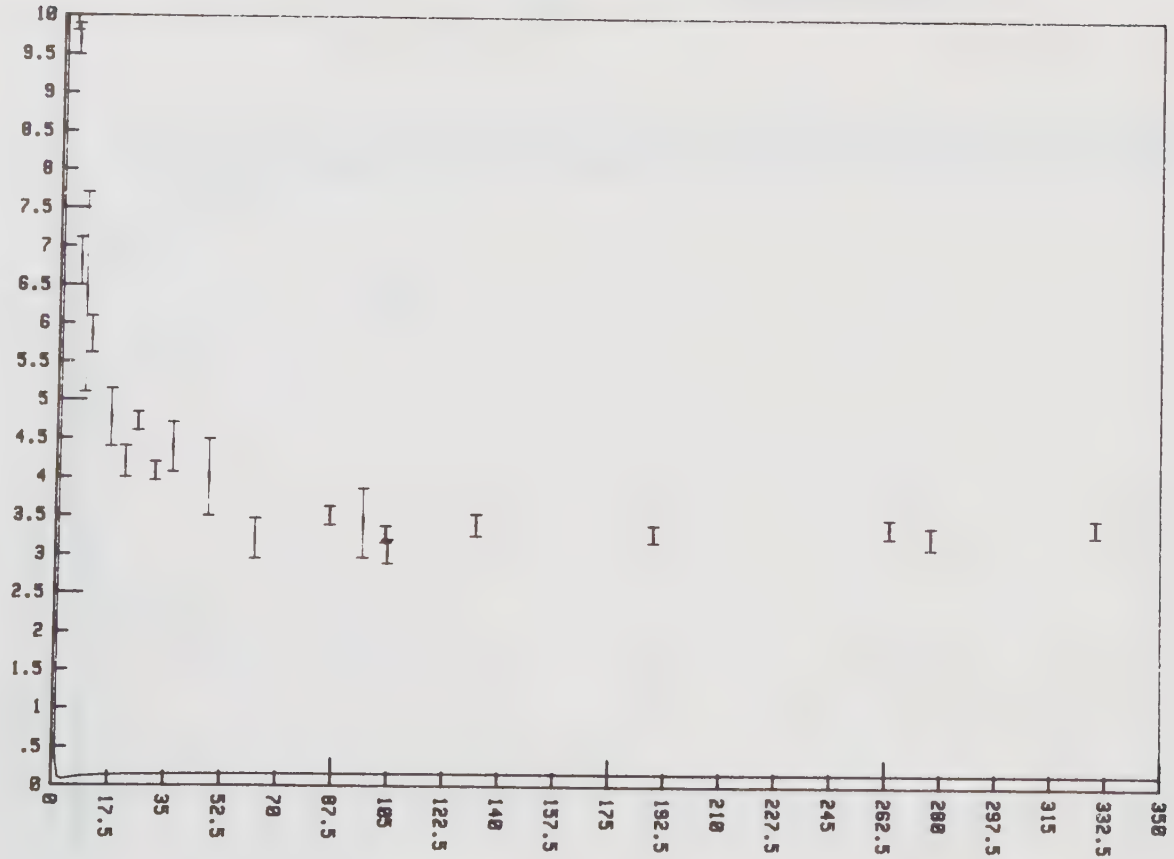
Graph 7f

Pion -___Proton-Streuung



Graph 7g

Pion -___Proton-Streuung



KAPPA=.931

MUE=1.399

L=219.022099516

Plot ___ Proton-Streuung

KAPPA=.931

MLE=1.943

L=219.022899516

Sigma [mBarn]

S [GeV**2]

10 9.5 9 8.5 8 7.5 7 6.5 6 5.5 5 4.5 4 3.5 3 2.5 2 1.5 1 .5 0

0 17.5 35 52.5 70 87.5 105 122.5 140 157.5 175 192.5 210 227.5 245 262.5 280 297.5 315 332.5 350

13. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Heisenberg-Dürr-Feldgleichungen der nichtlinearen Spinortheorie erweitert. Dabei werden Gleichungen mit höheren Produkten von Operatoren aufgestellt, welche kompliziertere Vertexausdrücke als bislang zur Folge haben. Diese ermöglichen die Beschreibung anderer Prozesse als derjenigen, die mit dem bisherigen Vertex berechnet werden könnten. Die bei der Erweiterung der Feldgleichung auftretenden Gleichungen mit Dirac-Differentialoperatoren höherer Ordnung führen zu einer Veränderung des Propagators und der Regularisierungseigenschaften der Pole. Die ursprünglich aufgestellten Heisenberg-Dürr-Feldgleichungen resultieren als Teil dieser umfassenderen Lösung.

Ferner wird in diesem Zusammenhang eine allgemein relativistische Verallgemeinerung der Heisenberg-Dürr-Gleichungen höherer Produkte in einer kovarianten Formulierung durchgeführt. Dieses hängt damit zusammen, daß bei Modellen, welche Prozesse im Elementarteilchen- oder sogar im Subquarkbereich (Preonen, Rishonen, Tohu und Wohu) beschreiben, eine allgemein relativistische Erweiterung notwendig ist. Diese wurde für die Heisenberg-Dürr-Gleichung in kovarianter Formulierung in der vorliegenden Arbeit durchgeführt. Dadurch wird die Berechnung eines Elementarteilchespektrums ermöglicht, deren Teilchen eine eingeprägte Länge haben und deren Masse durch die Krümmung des Raumes verursacht wird. Gegenüber den von Dürr in einer nicht-kovarianten Weise berechneten Elementarteilchenmassen sind die in dieser Arbeit berechneten Massen um einen Faktor 0.5 kleiner. Außerdem tritt eine Veränderung der Regularisierungseigenschaften im Propagator in Abhängigkeit von der Krümmung auf. Die starke Krümmung innerhalb eines Elementarteilchens bedingt eine allgemein relativistische Erweiterung der Feldgleichung. Bei den Berechnungen ergibt sich, daß die Kopplungskonstante dimensionslos wird. Da die von Dürr und Saller erhaltene Kopplungskonstante ebenfalls dimensionslos ist, wird die Erweiterung der Theorie auf eine allgemein relativistische Theorie in einem quasi-klassischen Ansatz ermöglicht.

In Anlehnung an frühere Arbeiten wird der freie Propagator aus einem Gleichungssystem für freie Felder berechnet. Unter Zuhilfenahme der dabei erhaltenen Ergebnisse werden die Kommutatorrelationen aus den gekoppelten Feldgleichungen mit Wechselwirkung bestimmt. Dadurch wird eine spezielle Geisterdarstellung ermöglicht, welche zur Aufstellung von Hadron/Geist bzw. Lepton/Quark-Modellen nützlich ist.

Die dynamische Gleichung für allgemein geordnete Produkte von Spinorfeldern wird konstruiert, welche eine Erweiterung der Theorie bei der Darstellung durch komplexere Feldgleichungen ermöglicht. Ferner wird die Reduktion der Feldgleichung auf den ρ- und $(\rho + 2)$-Sektor zum ersten Mal richtig berechnet, wodurch nun sämtliche Graphen der Theorie auf allen Näherungsstufen bestimmt werden können. Außerdem besteht erstmalig die Möglichkeit, alle Graphen für inelastische Streuungen und Zerfälle (auch Nukleonenzerfälle) zu berechnen. Hinzu kommt, daß zum ersten Mal eine Anziehprozedur für die nackte Greenfunktion und ein Iterationsverfahren für eine konsistente Berechnung des Propagators in einer Dipoltheorie aufgestellt werden.

Die Kanalgleichungen für die Streuung sowie das Skalarprodukt und dessen erste Näherung werden bestimmt. Dadurch besteht die Möglichkeit zur Berechnung von Annihilisationsprozessen.

Ein Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung der Unitarisierung. Die von Stumpf für den $\rho = 2$ -Sektor durchgeführten Prozeduren werden erstmalig auf den Spezialfall $\mu = \kappa$ im $\rho = 2$ - Sektor erweitert. Diese Erweiterung ist notwendig, da der auftretende μ_3-Geist den Wert κ annimmt. Ferner wird die Erweiterung auf den $\rho = 3$ - Sektor ausgedehnt, wobei die Fälle $\mu = \kappa$ und $\mu \neq \kappa$ untersucht werden.

Mit Hilfe aller dieser Bestimmungen werden die Zwei- und Dreiteilchen-Streuungen berechnet. Auch wird eine Unitarisierungs-Grundstruktur deutlich, welche auf alle Sektoren verallgemeinbar ist.

Neu ist die Berechnung der Parameter des Systems anhand des Fermionenspektrums. Bei der Auswertung der Fermionen-Eigenwertgleichung werden sechs Geister bestimmt. Diese Geister stimmen größenordnungsmäßig mit den Quarkmassen überein, der dritte Geist scheint ein Schattengeist der ‚Eichmasse' zu sein. Unter Benutzung dieser Ergebnisse wird die Bosonen-Eigenwertgleichung auf-

gestellt, aus der die Bosonenmassen berechnet werden. Dabei werden für sämtliche bekannte Teilchen mit einer Abweichung von 10-15 % und in der richtigen Größenordnung im Vergleich mit den experimentellen Werten gefunden. Dieselben Aussagen treffen für die berechneten Fermionenmassen zu. Zusätzlich werden experimentell noch nicht gefundene Elementarteilchenresonanzen vorausgesagt.

Schließlich werden die total elastischen Streuquerschnitte der Nukleon-Nukleon-Streuung (einem Zweiteilchenfall) und der Pion-Nukleon-Streuung (einem Dreiteilchenfall) berechnet. Dabei kommt es erstmalig zur Aufstellung von relativistischen Faddeev-Gleichungen für die nichtlineare Spinortheorie, wobei die S-Matrix durch die erste Padé - Approximation angenähert wurde. Für die kleinste Geistermasse zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten.

Die in dieser Arbeit aufgestellten Faddeev-Gleichungen basieren zwar zum Teil auf den von Ramacher gefundenen Resolventen Gleichungen - zum Teil deswegen, weil in dieser Arbeit die Kanalgleichungen verbessert wurden,- gehen aber weit darüber hinaus.

Die gute Anpassung der theoretisch berechneten Streukurven an das Experiment läßt sich erstens durch die veränderte Form des Skalarproduktes erklären, die automatisch die richtige Größenordnung liefert, und die Form der Kurven ist auf die richtige Berechnung der Wechselwirkungsterme zurückzuführen.

Anhang 1. Die Grassmannalgebra $\mathfrak{G}$

Im folgenden soll die Grassmannalgebra etwas näher betrachtet werden, da sie nicht zuletzt wegen der funktionalen Darstellung bestimmter Größen in der Quantenfeldtheorie von Bedeutung ist.

Unter einer Grassmannalgebra versteht man im allgemeinen die direkte Summe von abzählbar unendlichen vielen linearen und nicht notwendig topologischen Räumen E^n :

$$\mathfrak{G} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus E^n$$

Um den Begriff der Grassmannalgebra näher zu erläutern, gehen wir vom Begriff der gradierten Module aus. K soll ein kommutativer Ring sein. Haben wir einen K-Modul C, so können wir die Folgen von Modulen wie

$(K,C,C,C \ldots)$; $(K,C^*,(C\otimes C)^*,(C\otimes C\otimes C)^*, \ldots)$ oder $(K,C,C\otimes C,C\otimes C\otimes C, \ldots)$ aufstellen, wobei diese letzte Folge die Folge der Tensorordnungen ist, welche durch die Rekursionsformeln $T_0(C) = K$; $T_{p+1}(C) = T_p(C) \otimes C$ definiert ist.

Jede Folge von K-Modulen ist ein gradierter K-Modul.

Ein gradierter Modul

$G = (G_0,G_1,G_2,G_3 \ldots)$

ist also eine Folge von Modulen G_p, wobei für jedes $p\in\mathbb{N}$ ein Modul existiert. Viele der Eigenschaften von Modulen gelten auch für gradierte Module:

Ein Morphismus $t: G \to G'$ von gradierten Modulen ist eine Folge t_0,t_1,t_2 von Morphismen $t_p: G_p \to G'_p$ von Modulen, wobei für jedes $p \in \mathbb{N}$ ein Modul existiert.

Wenn ein weiterer solcher Morphismus gelten soll

$s: G' \to G''$

dann ist $s\circ t: G \to G''$ der Morphismus gradierter Module, der für jedes p durch $(s\circ t)_p = s_p \circ t_p$ definiert ist. So bilden die gradierten Module und ihre Morphismen eine Kategorie.

In einem gradierten Modul G mit Elementen G_p werden diese Elemente vom Grade p genannt, so daß man dazu übergehen kann, Elemente eines gradierten Moduls zu definieren:

$\varsigma \in G_p$

Wie man sieht, gehört zur Beziehung Element unbedingt auch der Grad dazu. Eine Folge davon ist, daß zwei Elemente von

G nur dann eine Summe in G haben werden, wenn sie auch denselben Grad haben.

Ein gradierter Submodul eines gradierten Modules G ist ein gradierter Modul S, wobei jedes S_p ein Submodul von G_p ist. Wenn $t: G \to G'$ ein Morphismus von gradierten Modulen ist, dann ist das Bild von t ein gradierter Submodul von G' und ist sogleich die Folge von Bildern von den Morphismen $t_p: G_p \to G'_p$, während der Kern von t die Folge von Kernen von t_p ist und somit wiederum ein gradierter Submodul von G.

Für gradierte Module ist die Konstruktion des Tensorproduktes zwischen zwei gradierten Modulen G und H eine der wichtigsten Aufgaben. Es ist folgendermaßen definiert:
$(G \otimes H)_n = \bigoplus_{p+q=n} (G_p \otimes H_q) = (G_n \otimes H_o) \oplus \ldots \oplus (G_o \otimes H_n)$, $n \in \mathbb{N}$
Sind zwei Elemente $g \in G_p$ und $h \in H_q$ gegeben, so ist ihr Tensorprodukt $g \otimes h$ ein Element von $G_p \otimes H_q$. Identifizieren wir dieses Element mit einem aus $(G \otimes H)_{p+q}$ unter Berücksichtigung des Biprodukts, so erhalten wir eine $G_p \otimes H_q \to (G \otimes H)_{p+q}$-Abbildung, die durch $(g,h) \to g \otimes h$ gegeben ist und die bilinear in p und q ist.

Behauptung 1

Wenn G,H,M gradierte Module sind und es gilt, daß für alle p und q bilineare Funktionen existieren $t_{p,q}: G_p \otimes H_q \to M_{p+q}$, dann gibt es genau einen Morphismus $t: G \otimes H \to M$ von gradierten Modulen mit $t(g \otimes h) = t_{p,q}(g,h)$ für alle $g \in G_p$, $h \in H_q$

Beweis 1

Wegen der Universalität des Tensorprodukts von Modulen gibt es für jedes p und q einen einzigen Morphismus $s_{p,q}: G_p \otimes H_q \to H_{p+q}$ von Modulen mit $s_{p,q}(g \otimes h) = t_{p,q}(g,h)$ für alle g und h. Wegen der Universalität der Einschübe von den Faktoren $G_p \otimes H_q$ im Biprodukt $(G \otimes H)_{p+q}$ gibt es für jedes n einen einzigen Morphismus $t_n: (G \otimes H)_n \to M_n$ mit $t_n(g \otimes h) = s_{p,q}(g \otimes h)$ für alle p und q mit $p+q = n$. Die Folge von Morphismen t_n ist dann der gewünschte Morphismus t von gradierten Modulen.

Der Hauptanwendungsgrund des Tensorprodukts gra-

dierter Module ist dieses Ergebnis. Es beschreibt die Familie der bilinearen Funktionen $t_{p,q}$ durch einen einzigen Morphismus t von gradierten Modulen. Beispielsweise mit u: G → G' und v: H → H', Morphismen von gradierten Modulen, kombiniert das Tensorprodukt folgendermaßen:
$u_p \otimes v_q : G_p \otimes H_q \to G'_p \otimes H'_q$, so daß ein Morphismus
G⊗H → G'⊗H' dadurch determiniert ist, den wir folgendermaßen schreiben: u⊗v. Das Tensorprodukt wird dadurch zu einem Bifunktor auf gradierten Modulen zu gradierten Modulen.

Für drei gradierte Module gilt das Assoziativgesetz. $g \otimes (h \otimes m) \to (g \otimes h) \otimes m$

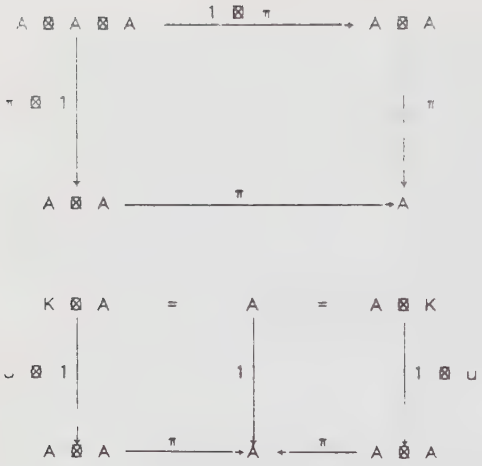
$G \otimes (H \otimes M) = (G \otimes H) \otimes M$

Einen gradierten Modul H nennt man auf Grad 0 konzentriert, wenn $H_n = 0$ für $n > 0$ ist. Die Folge $(H_o, 0, 0 \ldots)$ wird dann mit dem normalen Modul H_o identifiziert.

Mit K, dem Ring der Skalare, die als gradierter Modul im Grad 0 konzentriert identifiziert werden, können wir für jeden gradierten Modul G das gradierte Tensorprodukt $(G \otimes K)_n = G_n \otimes K = G_n$ aufstellen, mit dem folgende Identitäten bewiesen werden können:
$G \otimes K = G$, $K \otimes G = G$.

Eine Algebra über einen fixierten Ring K wird üblicherweise als Modul A definiert, welcher selbst insofern ein Ring ist, daß bezüglich des Produktes (a,b) → ab im Ring für alle Skalare k folgendes erfüllt ist:
(ab)k = a(bk) = (ak)b
Diese Bedingung, bei der das Distributiv-Gesetz angewandt wird, stellt fest, daß das Produkt (a,b) → ab eine bilineare Funktion A X A → A ist. Wegen der universellen Anwendbarkeit des Tensorproduktes können wir dieses auch folgendermaßen ausdrücken: Das Produkt eines einzigen Morphismus
$\pi : A \otimes A \to A$ von Modulen mit $\pi(a \otimes b) = ab$ für alle $a,b \in A$.
Das Einheitselement 1 des Ringes bestimmt ebenso einen Morphismus u: K → A von Modulen durch $u(\kappa) = 1\kappa \in A$. Die übrigen Ringaxiome, nämlich, daß die Multiplikation assoziativ sei und daß 1 sowohl eine Links- wie Rechtsidentität für die Multiplikation sei, werden durch die Kommutativität folgender Diagramme ausgedrückt.

Diagramme Ã



D.h. eine Algebra A ist ein Modul zusammen mit zwei Morphismen $\pi: A \boxtimes A \to A$ und $u: K \to A$ von Modulen, so daß die Diagramme Ã kommutieren.

Eine gradierte Algebra A wird nun auf dieselbe Art definiert. Eine gradierte Algebra A ist ein gradierter Modul mit zwei Morphismen $\pi: A \boxtimes A \to A$ und $u: K \to A$ gradierter Module, so daß die Diagramme Ã kommutieren.

Wir können diesen Sachverhalt auch durch Elemente definieren.

Annahme:

Wenn A ein gradierter Modul ist mit einem ausgesuchten Element $1 \in A_o$ und einer gegebenen Funktion, die jedem Paar von Elementen a,b von A ein Element $ab \in A$ (genannt: Produkt) zuordnet, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\deg(ab) = \deg a + \deg b$ — für alle $a,b \in A$
2. $a(b_1+b_2) = ab_1 + ab_2$
   $(b_1+b_2)a = b_1a + b_2a$ — wenn $\deg b_1 = \deg b_2$
3. $(ab)\kappa = a(b\kappa) = (a\kappa)b$ — für alle $a,b \in A, \kappa \in K$
4. $a(bc) = (ab)c$ — für alle $a,b,c \in A$
5. $1a = a = a1$ — für alle $a \in A$

dann gibt es Morphismen $\pi: A \boxtimes A \to A$ und $u: K \to A$ gradierter Module, so daß $\pi(a \boxtimes b) = ab$ für alle $a,b \to A$ und $u(\kappa) = 1\kappa$

für alle $\kappa \in K$

Beweis 2:

Nehmen wir an, a sei eine gradierte Algebra und werde durch die Diagramme Ä definiert. Für jede zwei Elemente $a,b \in A$ wird das Produkt ab das Bild $\pi(a \otimes b)$ von $a \otimes b$ unter dem Morphismus π sein. Dieses Produkt erfüllt die Bedingungen (1 bis 4). 1 soll das Bild der Einheit von K unter dem gegebenen Morphismus u sein. Wenn K in deg 0 konzentriert ist, dann ist 1 ein Element von A_o, und durch die Kommutativität erfüllt es die Bedingung 5.

Lassen wir umgekehrt (1 bis 4) gelten, so besagen die ersten drei Bedingungen, daß $(a,b) \mapsto ab$ für jedes Paar von Graden p und q eine bilineare Funktion $\pi_{p,q}: A_p \times A_q \to A_{p+q}$ ist. Diese bilineare Funktionen determinieren durch Annahme 1 einen Morphismus $u: K \to A$ mit $u(\kappa) = 1\kappa$. Die letzten zwei Bedingungen bestimmen, daß die Diagramme für diese Morphismen π und u kommutieren, so daß A eine gradierte Algebra ist.

Eine gradierte Subalgebra einer gradierten Algebra A ist ein gradierter Submodul S von A, der $1 \in A_o$ beinhaltet und unter der Multiplikation geschlossen ist. Z.B. ist A_o eine gradierte Subalgebra, die auf den Grad 0 konzentriert ist. Um einige Beispiele zu konstruieren, werden wir Ke für den freien K-Modul auf einem Erzeuger e schreiben. K ist der freie K-Modul, der durch $1 \in K$ erzeugt wird. Insofern ist eine Grassman-Algebra G^1 auf einem Erzeuger der gradierte Modul $G^1 = (K,Ke,0,0 \ldots)$ mit der Einheit 1 und einem Produkt gegeben durch das Produkt in K, außerdem Bilinearität und den Regeln

$1e = e1 = e$ und $ee = 0$.

Beispielsweise erhalten wir als das Produkt, das $K \times Ke \to Ke$ abbildet, die bilineare Funktion $(K, \lambda e) \mapsto K\lambda e$. Dieses Produkt ist manifest assoziativ und macht G zu einer gradierten Algebra.

Die Grassman-Algebra G^2 auf zwei Generatoren e und f ist der gradierte Modul $G^2 = (K,Ke \oplus Kf,Kef,0,0 \ldots)$ mit der Einheit 1, dem Produkt gegeben durch das Produkt in K, Bilinearität und den Regeln

$1e = e1 = e$; $1f = f1 = f$; $e^2 = f^2 = 0$; $fe = -ef$

Fassen wir die Eigenschaften der Grassman-Algebra zusammen. Für lineare, nicht notwendig vollständige Räume E_n können wir die Elemente dieser Räume wie folgt definieren:

$f_n \in E_n$

Die Grassmanalgebra hat dann folgende Eigenschaften:

1. E_o ist ein eindimensionaler linearer Raum mit dem Basis-Element f_o
2. Für alle $f_p \in E_p$ und $g_q \in E_q$ ist das Produkt $f_p \boxtimes g_q \in E_{p+q}$, und es gilt mit $\alpha \in \mathbb{C}$
   a. mit $f = \alpha f_o \in E_o$ gilt $f \boxtimes g_q = \alpha g_q$
   b. $f_p \boxtimes g_q = (-1)^{pq} g_q \boxtimes f_p$
3. Mit $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$, wobei $(f_n, g_n) \in E_n$, ist die Multiplikation folgendermaßen definiert:

   $$f\,g := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k\, g_{n-k}$$

   $\mathbb{C}$ ist bezüglich dieser Multiplikation abgeschlossen.

Wir können in $\mathbb{C}$ ein Skalarprodukt einführen. Dazu fordern wir für die Teilräume folgende Eigenschaften:

1. Es existiere eine Teilmenge $E_n^* \subset E_n$ mit den Eigenschaften
   a. E_n^* ist ein linearer topologischer Raum
   b. E_n^* liegt dicht in E_n bezüglich der Topologie von E_n
2. Für jedes $f_n \in E_n$ und $f_n^* \in E_n^*$ ist ein Skalarprodukt definiert, welches ein stetiges lineares Funktional auf E_n^* ist. Es gilt für das Skalarprodukt $(f,f) \geq 0$ und $(f,f) = 0$ genau für $f = 0$
3. Die Topologie von E_n ist die Topologie des zu E_n^* konjugierten Raumes
4. Die Abschließung von E_n^* durch das Skalarprodukt liegt in E_n und wird mit H_n bezeichnet. H_n ist ein Hilbertraum. Hiermit haben wir den Gel'fandschen Raumtripel aufgebaut: $E_n^* \subset H_n \subset E_n$

Die Erzeuger- und Vernichteroperatoren sind Erzeugender einer Grassmanalgebra /B44/.

Hiermit haben wir alle Strukturen, die zum Aufbau einer Grassmanalgebra benötigt werden, erläutert. Hinzu kommt noch, daß man Orthonormalbasen in dem Gel'fandschen Raumtripel definiert. Hat man dies getan, so kann man dazu übergehen, die Grassmanalgebra der funktionalen Erzeugeroperatoren

zu definieren.

Sei M eine meßbare Menge von Elementen $x \in M$ und sei $L_2(M)$ der Raum der auf M quadratintegrablen Funktionen $\theta(x)$ und j eine isometrische Abbildung von $L_2(M)$ auf H_1, so gilt:

$j: L_2(M) \to H_1$ wobei $\theta(x) \rightsquigarrow j(\theta) \in H_1$

und das Skalarprodukt folgende Form annimmt:

$(j(\theta), j(\theta)) = \int_M | \theta(x)|^2 \, dx$

dabei können wir j als lineares Funktional schreiben:

$j(\phi) = \int_M j(x) \, \theta(x) \, dx$.

Wegen der Isometrie gilt außerdem:

$(j(x), j(y)) = \delta(x,y)$ wobei $\delta(x,y)$ die Diracsche Deltafunktion auf M ist. Die $j(x)$ heißen die Erzeugenden von ϕ und bilden eine Orthonormalbasis in H_1.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$E_1^*(M) := \{\theta \in L_2(M); j(\theta) \in E_1^* \}$, $\theta \in E_1^*(M)$ heißt Basisfunktion

$E_1^{*\prime}(M) :=$ Raum der stetigen Funktionale auf $E_1^*(M)$

$E_1^{*\prime} :=$ Raum der stetigen Funktionale auf E_1^*

Da die Abbildung $j: E_1^*(M) \to E_1^*$ stetig auf die Abbildung $j: E_1^{*\prime}(M) \to E_1^*$ fortgesetzt werden kann, so kann jedes $f \in E_1$ als lineares Funktional dargestellt werden durch die Form

$f = \int j(x) \, \theta(x) \, dx$

wobei:

1. $f \in E_1^* \supset \theta(x) \in E_1^*(M) \subset L_2(M)$
2. $f \in H_1 \supset \theta(x) \in L_2(M)$
3. $f \in E_1 \supset \theta(x) \in E_1(M)$

Damit können wir jedes Element $f_n \in E_n$ darstellen als $f_n = \int j(x_1) \ldots j(x_n) \, \theta(x_1 \ldots x_n) \, d^*x$, wo θ eine antisymmetrische Distribution ist. Außerdem gilt:

$f = f(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \theta(x_1 \ldots x_n) \, j(x_1) \ldots j(x_n) \, d^*x$.

Anhang 2 Die nichtrelativistische Lippmann-Schwingergleichung

In diesem Anhang werden die Lippmann-Schwinger-Gleichungen hergeleitet. Dieser Anhang, der folgende über den Dreiteilchenfall und die Abschnitte im Text über den relativistischen Dreiteilchenfall bauen auf den Arbeiten von L.D. Fadeev auf. Dabei wird analog zu /B14/ vorgegangen.

Bei den anschließenden Überlegungen wird von einem Schwerpunktsystem ausgegangen, bei dem p den Impuls eines Teilchens darstellt und der Hilbertraum quadratintegrabel ist. Der Hamiltonoperator zweier Teilchen, die durch ein Potential V miteinander wechselwirken, sieht dann folgendermaßen aus:

$$\hat{h}' = \frac{\hat{k}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{k}_2^2}{2m_2} + V \qquad (A2.,1)$$

wobei k_1 und k_2 die Impulse und m_1 sowie m_2 die Massen der Teilchen darstellen. Nimmt man an, man hat es mit einem translationsinvarianten Potential V zu tun, so kann man auf das Schwerpunktsystem transformieren:

$$\hat{k} = \hat{k}_1 + \hat{k}_2$$

$$\hat{p} = \frac{m_2\hat{k}_1 - m_1\hat{k}_2}{m_1 - m_2}$$

$$\hat{h}' = \frac{\hat{k}^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V \qquad (A2.,2)$$

mit

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Wegen der Translationsinvarianz kann man die Schwerpunktsbewegung abspalten und erhält:

$$h = \frac{p^2}{2\mu} + V = h_o + V \qquad (A2.,3)$$

Stellt man mit $\psi^+(t)$ einen Streuzustand dar, der ein Wellenpaket beschreibt, das in der unendlichen Vergangenheit vollkommen frei war und mit zunehmender Zeit gestreut wurde, und vergleicht diesen Zustand mit einem anderen, der ein freies Wellenpaket beschreibt, so weiß man, daß beide in der unendlichen Vergangenheit miteinander übereinstimmten.

Mathematisch wird dieses durch die Normdifferenz ausgedrückt:

$$\lim_{t \to -\infty} \| e^{-iht} \psi^+ - e^{-ih_o t} \phi \| = 0 \qquad (A2.,4)$$

Bezeichnet man den Limes einer Norm als den starken Limes (abgekürzt mit $\lim^{st}$), so erhält man durch Umformung von /A2.,4/:

$$\psi^+ = \lim_{t \to -\infty}^{st} e^{iht} e^{-ih_o t} \phi = \Omega^+ \phi \qquad (A2.,5)$$

wobei Ω der Møller-operator ist, der folgendermaßen definiert wird:

$$\Omega^\pm = \lim_{t \to \mp \infty}^{st} e^{iht} e^{-ih_o t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^{0} e^{\pm \varepsilon t} e^{iht} e^{-ih_o t} dt \qquad (A2.,6)$$

h kommutiert nicht mit h_o. Trotzdem kann man eine Kommutator-ähnliche Relation herleiten. Aus /A2.,6/ erhält man für eine bestimmte Zeit T:

$$\Omega^\pm(t+T) = \lim_{t \to \mp\infty}^{st} e^{ih(t+T)} e^{-ih_o(t+T)} = e^{ihT} \Omega^\pm(t) e^{-ih_o T} \qquad (A2.,7)$$

Differentiation nach T ergibt schließlich:

$$0 = e^{ihT}(h \Omega^\pm - \Omega^\pm h_o) e^{-ih_o t} \qquad (A2.,8)$$

woraus die folgende Gleichung folgt:

$$h \Omega^\pm = \Omega^\pm h_o \qquad (A2.,9)$$

Beim Übergang zur Impulsdarstellung erhält man:

$$h |p>^\pm = h \Omega^\pm |p> = \Omega^\pm h_o |p> = \Omega^\pm \frac{p^2}{2\mu} |p> = \frac{p^2}{2\mu} |p>^\pm \qquad (A2.,10)$$

Dabei erfolgt eine Fortsetzung vom Raum der quadratintegrablen freien Zustände zum Raum nicht normierbarer scharfer Impulszustände. Diese Fortsetzung wurde durch die Arbeit von Fadeev / gerechtfertigt, da dort gezeigt wurde, daß eine Vielzahl verschiedener Potentiale richtige Ergebnisse ergeben. Durch die Fortsetzung auf scharfe Impulszustände bewirkt man, daß eine Wechselwirkung zwischen den Teilchen nun im ganzen Raum stattfindet. Dies läßt sich auch durch ein verändertes Potential beschreiben, ohne daß Konvergenzprobleme auftreten.

Wendet man den Møller-operator auf die ebene Welle an, so erhält man:

$$|p>^{\pm} = \lim_{\varepsilon \to 0} \pm\varepsilon \int_{\infty}^{0} dt\ e^{\pm\varepsilon t}\ e^{iht}\ e^{-iEt}\ |p>$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \pm\varepsilon \int_{\infty}^{0} dt\ e^{i(h-E\ i\varepsilon)t}\ |p>$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \pm i\varepsilon\ (E \pm i\varepsilon - h)^{-1}\ |p>$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \pm i\varepsilon\ (z-h)^{-1}\ |p>$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \pm i\varepsilon\ g(z)\ |p> \qquad \text{(A2.,11)}$$

womit eine Verbindung zwischen den zeitabhängigen und den zeitunabhängigen Zuständen hergestellt worden ist. Aus /A2.,11/ ersieht man ferner:

$$z - z' = z-h-z'+h = g^{-1}(z) - g^{-1}(z') \qquad \text{(A2.,12)}$$

Hieraus folgt:

$$(z-z')\ g(z)\ g(z') = (g^{-1}(z) - g^{-1}(z'))\ g(z)\ g(z') = g(z') - g(z) \qquad \text{(A2.,13)}$$

/A2.,13/ heißt die erste Resolvente. Mit

$$g_o(z) = (z-h_o)^{-1} \quad \text{ergibt sich} \qquad \text{(A2.,14)}$$

$$h-h_o = g_o^{-1}(z) - g^{-1}(z) \quad \text{bzw.}$$

$$(h-h_o)\ g(z)\ g_o(z) = (g_o^{-1}(z) - g^{-1}(z))\ g(z)\ g_o(z) = g(z) - g_o(z) \qquad \text{(A2.,15)}$$

Hieraus kann man folgern:

$$g(z) = g_o(z) + (h-h_o)\ g(z)\ g_o(z) = g_o(z) + g_o V g(z)$$

$$= g_o(z) + g(z) V g_o(z) \qquad \text{(A2.,16)}$$

Verwendet man Gleichung /A2.,11/ sowie /A2.,15+16/ und die Gleichung

$$|p>^{\pm} = \pm i\varepsilon\,(E \pm i\varepsilon - E)^{-1}\,|p> = \pm i\varepsilon\,(E \pm i\varepsilon - h_o)^{-1}\,|p>$$

$$= \pm i\varepsilon\, g_o\,(E \pm i\varepsilon)\,|p> \qquad (A2.,17)$$

dann folgt

$$|p>^{\pm} = |p> + g_o(E \pm i\varepsilon)\, V\, |p>^{\pm} \qquad (A2.,18)$$

Um Streuquerschnitte ausrechnen zu können, wird die S-Matrix benötigt. Mit /3.4,1/ erhält man:

$$S_{ab} = <\Psi_b^- \mid \Psi_a^+>$$

$$= <\Omega^- \Phi_b \mid \Omega^+ \Phi_a>$$

$$= <\Phi_b \mid \Omega^{-\dagger}\ \Omega^+ \mid \Phi_a> \qquad (A2.,19)$$

Beim Übergang auf die Impulsdarstellung erhält man:

$$S_{pp'} = <p' \mid \Omega^{-\dagger}\ \Omega^+ \mid p>$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{i(E-E')t} <p' \mid p>^+$$

$$= \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, e^{i(E'-E)t} <p'|g(E+i\varepsilon)|p> \qquad (A2.,20)$$

$g(E+i\varepsilon)$ ist von seinem Verhalten her sehr singulär /B14/. Wir wollen nun versuchen, dieses Verhalten bei der S-Matrix etwas abzuschwächen. Benutzt man /A2.,16/ und iteriert diese Gleichung einmal, so erhält man:

$$g(z) = g_o(z) + g_o(z)\, V\, g_o(z) + g_o(z)\, V\, g(z)\, V\, g_o(z)$$

$$= g_o(z) + g_o(z)[\, V + V\, g(z)\, V\,]\, g_o(z)$$

$$= g_o(z) + g_o(z)\, t(z)\, g_o(z) \qquad (A2.,21)$$

Einsetzen in die S-Matrix ergibt:

$$S_{pp'} = \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, e^{i(E'-E)t} \left[\frac{\delta(p'-p)}{z - \frac{p^2}{2\mu}} + \frac{<p' \mid t(z) \mid p>}{(z - \frac{p'^2}{2\mu})(z - \frac{p^2}{2\mu})} \right]$$

$$= \delta(p'-p) - \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{i(E'-E)t}}{E' - E - i\varepsilon} <p' \mid t(E+i\varepsilon)|p>$$

$$= \delta(p'-p) - 2\pi i\, \delta(E'-E) \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} <p' \mid t(E+i\varepsilon)|p> \qquad (A2.,22)$$

Dies ist die bekannte Lippmann-Schwingergleichung.

Ein zweiter mathematisch korrektere Weg, die Lippmann-Schwingergleichungen abzuleiten, soll im folgenden dargestellt werden. Die Ableitung beruht auf einem operatortechnischen Formalismus. Auch hier geht man von einem Schwerpunktsystem aus, bei dem p den Impuls eines Teilchens darstellt, der Hilbertraum quadratintegrabel sein soll und der freie Hamiltonoperator h_o durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\langle p|h_o|p'\rangle = p^2\ \delta^3(p-p') \qquad (A2.,23)$$

Gleichung /A2.,23/ läßt sich durch eine Green-Funktion lösen mit dem Lösungsoperator

$$g_o = (h_o - s\,1\!\!1)^{-1} \quad \text{mit} \qquad (A2.,24)$$

$$\langle p|\,g_o(s)|p'\rangle = (p^2-s)^{-1}\ \delta^3(p-p') \qquad (A2.,25)$$

$1\!\!1$ ist der Einheitsoperator und s ein beliebiger komplexer Parameter. Da das Potential lokaler Art sein soll, nimmt es in der Impulsdarstellung die Form an:

$$\langle p|\ V\ |p'\rangle = v(p-p') \qquad (A2.,26)$$

wobei angenommen wird, daß es ein allgemeimes Yukawa-Potential ist.

$$v = \int_{\mu}^{\infty} d\zeta\ \sigma(\zeta)(p^2+\zeta^2)^{-1} \qquad (A2.,27)$$

Die Gewichtsfunktion σ besteht aus Distributionen, das Integral über die Gewichtsfunktion bleibt auf den Bereich (μ,∞) beschränkt, und dadurch wird das allgemeine Yukawa-Potential in p analytisch. Betrachtet man den totalen Zweiteilchenhamiltonoperator $h_\alpha = h_o + V$ und den Lösungsoperator $g_\alpha = (h-s1\!\!1)^{-1}$, so genügen beide der zweiten Lösungsgleichung /A2.,16/ $g_\alpha(s) = g_o(s) - g_o(s)\,V\,g_\alpha(s)$ bzw. nach einmaliger Approximation:

$$g_\alpha(s) = g_o(s) - g_o(s)\,V\,g_o(s) \qquad (A2.,28)$$

Schreibt man diese Gleichung in Matrixelementen aus, so bekommt man eine Integralgleichung für $\langle p|g(s)|p'\rangle$, wobei der Kern folgendermaßen aussieht:

$$\langle p|g_o(s)\ V|p'\rangle = (p^2-s)^{-1}\ v(p-p') \qquad (A2.,29)$$

Bevor mit der Herleitung der Lippmann-Schwinger-Gleichung fortgefahren wird, empfiehlt es sich, bestimmte Begriffe und mathematische Theoreme zu erläutern und zusammenzufassen. Um nicht auf die entsprechende Sätze zu ausführlich einzugehen, wird der Beweis nur kurz skizziert und für weitere Information

auf die Literaturangaben hingewiesen.

Definition 1: Unter einem Schmidtoperator versteht man einen Operator, der als Integraltransformation eines Kernes $k(p,p')$ dargestellt werden kann und der folgender Bedingung zusätzlich unterliegt:

$$\int d^3p \int d^3p' \quad |k(p,p')|^2 < \infty$$

Definition 2: Unter der Schmidtnorm des Schmidtoperators versteht man die Quadratwurzel des oben genannten Integrals. Man schreibt $\| K \|$ dafür.

Definition 3: In einem Hilbertraum ist die Beschränkung eines Operators folgendermaßen definiert:

$$|K|^2 = \max_{|x>} \frac{<x|K^* K|x>}{<x|x>}$$

Es muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Beschränkung eine viel schwächere Bedingung als die Schmidtnorm ist. $|K| \leq \|K\|$

Satz 1: : Das Produkt eines Schmidtoperators mit einem beliebigen beschränkten Operator ist stets ein Schmidtoperator. /R.Schatten: Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer-Verlag, 1960/.

Satz 2: Für die Integraltransformation mit dem Kern $k(p,p',\mu)$, die den analytischen Operator $K(\mu)$ darstellt und die in μ im Bereich D definiert ist, ist es notwendig und hinreichend, daß die Kernfunktionen analytisch in μ im Bereich D für jedes reelle p' sind und daß der Operator in jedem Unterbereich von D gleichmäßig beschränkt ist. /Lovelace: Three Particles Systems and Unstable Particles 1, Imperial College, London, 1963/.

Satz 3: Wenn μ ein komplexer Parameter ist und $K(\mu)$ ein Satz von Operatoren, der folgenden Bedingungen unterliegt, dann ist

$$[1 + K(\mu)]^{-1}$$

ein meromorpher Operator in D, und die Residuen der Pole haben einen endlichen Rang. Unter einem endlichen Rang versteht man, daß die Pole

$$\langle p|R|p'\rangle = \sum_{j=1}^{N} f_j(p)\, g_j(p')$$

sich endlich faktorisieren lassen und daß sowohl f wie g quadratintegrabel sind.

Bedingung 1: $K(\mu)$ ist ein analytischer Operator für μ in einem verbundenen Bereich D.

Bedingung 2: Für jedes μ in D und einem n unabhängig von μ soll

$$[K(\mu)]^n$$

ein Schmidtoperator sein.

Bedingung 3: Es soll mindestens einen Punkt μ_o in D geben, für den gelten soll:

$$|K(\mu_o)| < 1$$

/vergleiche hierzu Satz 2/.

Mit Hilfe dieser Sätze und Bedingungen lassen sich die Bedingungen für den Operatormeromorphismus bestimmen sowie die Stellen, an denen die Resolvente nicht operatoranalytisch ist. Genau diese Stellen kennzeichnen die gebundenen Zustände. Für diese gilt:

Satz 4: Die Residuen R_n der Resolventen $[K-\mu I]^{-1}$ eines beliebigen Operators an einem beliebigen einfachen Pol μ_n sind die Projektionsoperatoren der zugehörigen gebundenen Zustände. Für diese gilt

$$(R_n)^2 = R_n$$

sowie die Orthogonalitätsrelation

$$R_m R_n = 0 \qquad \forall\, \mu_m \neq \mu_n$$

/ E.Hille und R.S.Phillips: Functional Analysis and Semigroups, American Math.Soc., 1957/.

Aus der speziellen Darstellung /A2.,23/ kann man sofort folgern, daß sich das Spektrum des freien Hamiltonoperators auf der reellen Achse befinden wird. Die Projektionsoperatoren können folgendermaßen dargestellt werden:

$$\langle p|\Delta_o(E)|p'\rangle = \delta^6(p^2-E)\,\delta^3(p-p')$$

Die Spektralfunktionen sind aufgrund der Tatsache, daß nur reelle Variablen p vorkommen, gegeben durch

$$h_o = \int_{\varepsilon}^{\infty} dE \; E \; \Delta_o(E)$$

$$g_o = \int_{\varepsilon}^{\infty} dE \, [E-s]^{-1} \; \Delta_o(E)$$

und die Diskontinuitätsformel lautet sodann

$$g_o(E+i\varepsilon) - g_o(E-i\varepsilon) = 2\pi i \; \Delta_o(E) \qquad (A2.,30)$$

Betrachtet man die Diskontinuitätsformel entlang des Schnittes, so kann man unter Benutzung der zweiten Lösungsgleichung schreiben:

$$g_o(s) - g_o(s') = (s-s') \, g_o(s) \, g_o(s')$$

$$g_\alpha(s) - g_\alpha(s') = (s-s') \, g_\alpha(s) \, g_\alpha(s') \qquad (A2.,31)$$

Man erhält dann:

$$\Delta_o(E) = \frac{1}{2\pi i} [\, g_\alpha(E+i\varepsilon) - g_\alpha(E-i\varepsilon)] = [1 - g_\alpha(E+i\varepsilon) \, V_\alpha] \Delta_o(E) \, [1 - V_\alpha \, g_\alpha(E-i\varepsilon)]$$

Führt man einen Übergangsoperator auf der Energieschale mit folgendem Matrixelement ein,

$\langle p | t_\alpha(s) | p' \rangle$ wobei $p^2 = p'^2 = s$ und $t_\alpha(s) = V_\alpha - V_\alpha \; g_\alpha \; V_\alpha$

so erhält man

$$t_\alpha(s) = [1 + V_\alpha g_o(s)]^{-1} \, V_\alpha = V_\alpha \, [1 + g_o(s) \, V_\alpha]^{-1} \quad \text{sowie} \qquad (A2.,32)$$

$$t_\alpha(s) \, g_o(s) = V_\alpha \, g_\alpha \quad \text{und}$$

$$g_o(s) \, t_\alpha(s) = g_\alpha(s) \, V_\alpha \qquad (A2.,33)$$

Das sind die bekannten Lippmann-Schwinger-Gleichungen.

Anhang 3. Die nichtrelativistische Fadeev-Gleichung

In diesem Anhang wird zum Dreiteilchenproblem übergegangen. Unter Vernachlässigung von Dreiteilchenpotentialen lautet der Hamiltonoperator

$$H' = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3} + v_1 + v_2 + v_3 \qquad (A3.,1)$$

$$\text{mit } v_1 = v(2,3) \; ; \; v_2 = v(3,1) \; ; \; v_3 = v(1,2) \qquad (A3.,2)$$

d.h. mit v_1 dem Potential zwischen den Teilchen 2 und 3, v_2 dem Potential der Teilchen 3 und 1, sowie v_3 dem Potential der Teilchen 1 und 2. Im Schwerpunktsystem sind die Jacobikoordinaten für das System, bei dem das zweite und das dritte Teilchen ein Cluster bilden:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_2 - r_3 \\ \eta_1 &= r_1 - \frac{m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_2 + m_3} \\ r &= \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned} \qquad (A3.,3)$$

Die entsprechenden Impulse lauten:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_3 k_2 - m_2 k_3}{m_2 + m_3} \\ q_1 &= \frac{(m_2 + m_3) k_1 - m_1 (k_2 + k_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \\ k &= k_1 + k_2 + k_3 \end{aligned} \qquad (A3.,4)$$

und der Hamiltonoperator sieht folgendermaßen aus:

$$H' = \frac{k^2}{2\,(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{q_1^2}{2M_1} + \sum_{\gamma=1}^{3} v_\gamma \qquad (A3.,5)$$

mit den reduzierten Massen

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_3}{m_2 + m_3} \quad \text{und} \quad M_1 = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (A3.,6)$$

Betrachtet man (wie in Anhang 2) nur die Relativbewegung und spaltet die Schwerpunktsbewegung ab, so ergibt sich für den Hamiltonoperator:

$$H = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{3} v_\gamma = h_o + \sum_{\gamma=1}^{3} v_\gamma \qquad \alpha = 1,2,3 \quad (A3.,7)$$

Die Abspaltung der freien Schwerpunktsbewegung ist wegen der

Translationsinvarianz der Zweiteilchenpotentiale möglich. Die Schwerpunktsbewegung wird dabei zu einem Impulseigenzustand, der uns nicht interessiert.

Die einzelnen α's stellen die verschiedenen Subsysteme dar. So kann man neben dem gesamten Hamiltonoperator auch die einzelnen Kanal-Hamiltonoperatoren aufstellen:

$$h_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + v_\alpha \qquad \text{(A3.,8)}$$

Der gesamte Hamiltonoperator lautet dann:

$$H = h_\alpha + \bar{V}_\alpha \quad \text{mit} \qquad \text{(A3.,9)}$$

$$\bar{V}_\alpha = V - v_\alpha = \sum_{\substack{\gamma=0 \\ \gamma\neq\alpha}}^{3} v_\gamma \qquad \text{(A3.,10)}$$

Zusammen mit den Kanal-Hamiltonoperatoren kann man auch die Kanalresolventen aufstellen:

$$g_\alpha(z) = (z - h_\alpha)^{-1} \qquad \text{(A3.,11)}$$

Die Streuung im Subsystem α wird analog dem Zweiteilchenfall durch folgenden t-Operator dargestellt:

$$t_\alpha(z) = V_\alpha + V_\alpha\, g_\alpha(z)\, V_\alpha \qquad \text{(A3.,12)}$$

Auch im Dreiteilchenfall kann man einen Møller operator definieren:

$$\Omega_\alpha^{\pm} = \lim_{t\to\mp\infty}{}^{st} e^{iHt}\, e^{-ih_\alpha t} \qquad \alpha = 0,1,2,3 \qquad \text{(A3.,13)}$$

Analog ergibt sich folgende Kommutatorrelation:

$$H\,\Omega_\alpha^{\pm} = \Omega_\alpha^{\pm}\, h_\alpha \qquad \text{(A3.,14)}$$

Der Übergang von einem zeitabhängigen zu einem zeitunabhängigen Zustand ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$|\psi_{\alpha m}^{\pm}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} i\epsilon\, G(E \pm i\epsilon)\, |\phi_{\alpha m}\rangle \quad \text{mit} \qquad \text{(A3.,15)}$$

$$G(z) = (z-H)^{-1} \qquad \text{(A3.,16)}$$

G ist die volle Resolvente des Dreiteilchensystems; drückt man dieselbe durch die Kanalresolventen aus, so erhält man die Resolventengleichungen:

$$G(z) = g_\alpha(z) + g_\alpha(z)\,\bar{V}_\alpha\, G(z) = g_\alpha(z) + G(z)\,\bar{V}_\alpha\, g_\alpha(z) \qquad \text{(A3.,17)}$$

wobei

$$\bar{V}_\alpha = g_\alpha^{-1}(z) - G^{-1}(z) \qquad \text{(A3.,18)}$$

Setzt man die Resolvente in /A3.,15/ ein, so ergibt sich:

$$|\psi^{\pm}_{\alpha m}> = |\phi_{\alpha m}> + \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon\, g_{\alpha}(E+i\varepsilon)\, \bar{V}_{\alpha}\, |\psi^{\pm}_{\alpha m}> \qquad (A3.,19)$$

bzw.

$$|\psi^{\pm}_{\beta n}> = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon\, g_{\alpha}(E+i\varepsilon)\, \bar{V}_{\alpha}\, |\psi^{\pm}_{\beta n}> \qquad (A3.,20)$$

Im Gegensatz zum Zweiteilchenproblem ist die Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung nicht eindeutig gegeben, da die homogene Gleichung auch Lösungen im Streuraum ergibt. Insofern ist im Gegensatz zum Zweiteilchenfall die Anwendung der Lippmann-Schwinger-Gleichung im Dreiteilchenfall nicht erfolgversprechend. Der Grund dafür ist, daß sich der Störungsanteil des Spektrums eines Systems nicht völlig mit dem ungestörten Anteil des Spektrums deckt. So treten bei einer Wechselwirkung mehr gebundene Zustände auf, als wenn die Wechselwirkung ausgeschaltet ist. Im Zweiteilchenfall verhindert die Energieerhaltung bei Teilchen, welche mit positiver Energie einfallen, daß diese einen gebundenen Zustand erreichen. Bei Drei- oder Mehrteilchensystemen ist es hingegen durchaus möglich, daß zwei oder mehr Teilchen einen gebundenen Zustand erreichen.

Im Zweiteilchenfall hat man demnach so viele Streulösungen wie ungestörte Lösungen, da keine gebundenen Zustände auftreten. Im Dreiteilchenfall muß aber mit zusätzlichen Gliedern zum kontinuierlichen Spektrum gerechnet werden, die eine Subclusterung des Systems beschreiben. Mathematisch wird diese Schwierigkeit durch das Auftreten der Dirac-Deltafunktionen der Impulse im Kern der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung dargestellt. Diese Deltafunktionen treten deshalb auf, weil ein Dreiteilchensystem beschrieben wird, bei dem zwei der Teilchen miteinander wechselwirken, während sich das dritte Teilchen ungestört entwickelt. Der Kern der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung wird dadurch nicht mehr quadratintegrabel und auch nicht kompakt, so daß die Integralgelichung keine Lösung haben kann /176/.

A3.1 Die Glöckle-Gleichungen

Dessen ungeachtet ist es im allgemeinen Fall nicht identischer Teilchen durch Zusatzforderungen an die Lippmann-Schwinger-Gleichung möglich, zu eindeutigen Lösungen zu kommen. Fordert man neben

$$|\psi^{+}_{1m}> = |\phi_{1m}> + \lim_{\varepsilon \to 0} g_1(E+i\varepsilon)\, \bar{V}_1 \quad |\psi^{+}_{1m}> \qquad (A3.1,1)$$

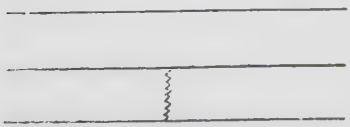
noch

$$\begin{aligned} |\psi^{+}_{1m}> &= \lim_{\varepsilon \to 0} g_2(E+i\varepsilon)\, \bar{V}_2 \quad |\psi^{+}_{1m}> \\ |\psi^{+}_{1m}> &= \lim_{\varepsilon \to 0} g_3(E+i\varepsilon)\, \bar{V}_3 \quad |\psi^{+}_{1m}> \end{aligned} \qquad (A3.1,2)$$

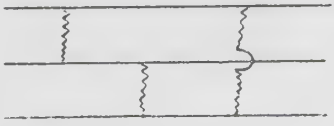
so erhält man selbst im Aufbruchsfall /177/ eindeutige Lösungen. Die Forderungen /A3.1,2/ bedingen, daß Lösungen des Typs /A3.,15/ ausgeschlossen sind, da in den Kanälen 2 und 3 nur auslaufende Kugelwellen erlaubt sind. In /177/ werden auch Methoden genannt, wie man aus den nicht-kompakten Kernen in den Gleichungen /A3.1,1+2/ kompakte macht. Die einfachste Methode läuft auf eine Iterierung von Gleichung /A3.1,1/ unter den zusätzlichen Bedingungen /A3.1,2/ hinaus. Dabei setzt man die Gleichungen /A3.1,2/ in die Gleichung /A3.1,1/ ein und erhält:

$$|\psi^{+}_{1m}> = |\phi_{1m}> + \lim_{\varepsilon \to 0} g_1\, \bar{V}_1\, g_2\, \bar{V}_2\, g_3\, \bar{V}_3 \quad |\psi^{+}_{1m}> \qquad (A3.1,3)$$

Stellt man den Kern der Gleichungen /A3.,19/ und /A3.1,3/ graphisch dar, so bemerkt man, das in der Lippmann-Schwinger-Gleichung ein Teilchen existiert, das an der Wechselwirkung nicht teilnimmt, während bei der Glöckle-Gleichung alle Teilchen miteinander wechselwirken. Diese Wechselwirkung aller Teilchen miteinander führt bei genügend rasch abfallendem Potential zu einem kompakten Kern unter der Nebenbedingung $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.



/A3.,19/



/A3.1,3/

Im Streubereich ist der Kompaktheisbeweis wesentlich schwieriger, da er im Banachraum geführt werden muß. Der Kern von /A3.1,3/ ist verbunden und enthält keine Delta-Funktionen, die die Schmidtnorm divergieren lassen. Durch einfache Umformung der Glöckle-Gleichungen ist es möglich, zu den anderen Integralgleichungen zu kommen, die das Dreiteilchenproblem exakt beschreiben.

A3.2 Die Faddeev-Gleichungen

Multipliziert man die Gleichungen /A3.1,1+2/ von links mit $g_o v_i$, so erhält man unter Berücksichtigung von

$$|\psi_{1m}^{+}>_i = \lim_{\varepsilon \to 0} g_o(E+i\varepsilon)\, v_i\, |\psi_{1m}^{+}> \text{ und der Beziehung} \qquad (A3.2,1)$$

$$g_i(z)\, v_i = g_o(z)\, t_i(z) \qquad (A3.2,2)$$

schließlich:

$$|\psi_{\alpha m}^{+}>_i = \delta_{i\alpha}\, |\phi_{\alpha m}> + g_o\, t_i\, [\, |\psi_{\alpha m}^{+}>_j + |\psi_{\alpha m}>_k\,] \quad (i,k) = 1,2,3$$

mit (A3.2,3)

$$\sum_{i=1}^{3} |\psi_{\alpha m}^{+}>_i = |\psi_{\alpha m}^{+}> \qquad (A3.2,4)$$

Hierbei wurde auf beliebige Anfangszustände verallgemeinert. Faddeev gelangte zu diesen Gleichungen als er erkannte, daß eine Aufspaltung des Typs /A3.2,4/ zu einer Teillösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung führt. Diese Teillösung eliminiert einen Teil des nichtzusammenhängenden Kernes und bewirkt so, daß der Kern der iterierten Gleichung zusammenhängend wird. Diese Eigenschaft erlaubt die Anwendung von Standardlösungsverfahren.

A3.3 Die Alt-Grassberger-Sandhas-Gleichungen

Wenn man die Gleichungen /A3.1,1+2/ nicht mit $g_o v_i$ wie im vorigen Abschnitt, sondern mit v_i alleine multipliziert, dann erhält man, nachdem man die dabei entstandenen Gleichungen paarweise addiert hat:

$$\nabla_\beta |\psi_{1m}^{+}> = (1-\delta_{\beta 1})\, v_1\, |\phi_{1m}> + \sum_{\gamma \neq \beta} t_\gamma\, g_o\, \nabla_\gamma\, |\psi_{1m}^{+}> \qquad (A3.3,1)$$

mit

$$V_1 |\Phi_{1m}^{+}\rangle = g_o^{-1}(E) |\Phi_{1m}\rangle \qquad (A3.3,2)$$

und

$$\bar{V}_\beta |\Psi_{1m}^{+}\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} U_{\beta 1}(E+i\varepsilon) |\Phi_{1m}\rangle \qquad (A3.3,3)$$

erhält man bei Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszustände und beliebige komplexe Energien:

$$U_{\beta\alpha}(z) = (1-\delta_{\beta\alpha}) g_o^{-1}(z) + \sum_{\gamma \neq \beta} t_\gamma(z)\, g_o(z)\, U_{\gamma\alpha}(z) \qquad (A3.3,4)$$

Dies ist ein Gleichungssystem für die Übergangsoperatoren, deren Matrixelemente zwischen den Kanalzuständen mit den „rearrangement"-Wirkungsquerschnitten verknüpft sind. Der Übergangsoperator

$$U_{0\alpha}(z) = g_o^{-1}(z) + \sum_{\gamma=1}^{I} t_\gamma(z)\, g_o(z)\, U_{\gamma\alpha}(z) \qquad (A3.3,5)$$

liefert direkt den Aufbruchsquerschnitt. Diesen kann man unter Zuhilfenahme von Gleichung /A3.3,5/ ohne Lösen einer Integralgleichung aus den „rearrangement"-Operatoren berechnen. Zu einer Integralgleichung gelangt man, wenn man in /A3.3,4/ $\alpha = 0$ setzt.

A3.4 Die Levin-Kouri-Gleichungen

Die Levin-Kourin-Gleichungen lassen sich analog zu den vorigen Abschnitten durch Multiplikation von links der Gleichungen /A3.1,1+2/ erreichen. In diesem Falle wird mit $\bar{V}_j$ multipliziert. Durch Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszustände und beliebige komplexe Energien erhält man:

$$\tilde{U}_{\beta\alpha}(z) = \bar{V}_\beta\, \delta_{\gamma\alpha} + \bar{V}_\beta\, g_\gamma(z)\, \tilde{U}_{\gamma\alpha}(z) \qquad (A3.4,1)$$

Die Operatoren sind dabei folgendermaßen definiert

$$\tilde{U}_{\beta\alpha}(z) = \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta\, G(z)\, \bar{V}_\alpha \qquad (A3.4,2)$$

Diese Operatoren stimmen on-shell mit den Operatoren der Gleichung /A3.3,4/ überein.

A3.5 Die eindeutigen Faddeev-Gleichungen in der Impulsdarstellung

Bei den vorher erwähnten Gleichungen wurde an verschiedenen Stellen auf die Problematik der Kompaktheit der Integralgleichungen eingegangen. Es darf aber nicht übersehen werden, daß die Eindeutigkeit das entscheidende Kriterium für einen zusamm-

hängenden Kern ist. Die Eindeutigkeit der Glöckle-Gleichungen sowie der Faddeev-Gleichungen /175/ darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß diese Eigenschaft erst für die anderen Gleichungen nachgewiesen werden muß. Ein algebraischer Zusammenhang zwischen den Gleichungen ist keine Gewähr für die Eindeutigkeit.

In diesem Abschnitt werden die Faddeev-Gleichungen etwas genauer studiert.

Nachdem Faddeev erkannte, daß die Lippmann-Schwinger-Gleichung für den Dreiteilchenfall keine eindeutige Lösung hat, untersuchte er die Eigenschaften des Operators

$$T(z) = V + V\,G(z)\,V \qquad (A3.5,1)$$

Dieser Operator, der die analoge Form des Zweiteilchen-Operators aufzeigt /A2.,32/, ist nicht so direkt wie der Zweiteilchenoperator mit dem Streuquerschnitt verbunden. Auch in Analogie zum Zweiteilchenfall erhält man:

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z)\,T(z)\,g_0(z) \qquad (A3.5,2)$$

$$T(z) = V + V\,g_0(z)\,T(z) \quad \text{und} \qquad (A3.5,3)$$
$$T(z) = V + T(z)\,g_0(z)\,V$$

Diese Integralgleichungen für den T-Operator liefern wie die Lippmann-Schwingergleichungen keine eindeutigen Ergebnisse. Um auf eine neue Gleichung zu kommen, ging Faddeev folgendermaßen vor: er spaltete /A3.5,3/ in drei Gleichungen auf

$$T_i(z) = v_i + v_i\,g_0(z)\,T(z) \quad \text{wobei} \qquad (A3.5,4)$$

$$V = v_1 + v_2 + v_3 \qquad (A3.5,5)$$

Hiermit erhält man für den T-Operator die Summe der drei neuen Operatoren T_i:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (A3.5,6)$$

/A3.5,3/ wird hierdurch in folgendes System umgewandelt:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 \\ v_3 & v_3 & v_3 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \qquad (A3.5,7)$$

Obwohl der Kern in dieser Darstellung ebenfalls nicht-kompakt ist, ist es möglich, eine Teillösung zu finden, die weniger singulär ist. Für T_1 erhält man aus /A3.5,7/:

$$T_1 = v_1 + v_1 g_o T_1 + v_1 g_o (T_2 + T_3) \qquad (A3.5,8)$$

Löst man nach T_1 auf, so ergibt sich:

$$T_1 = t_1 + t_1 g_o (T_2 + T_3) \quad \text{wobei}$$
$$t_1 = \frac{v_1}{1 - v_1 g_o} \qquad (A3.5,9)$$

Schreibt man /A3.5,7/ mit Hilfe von /A3.5,9/ um, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} g_o \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \qquad (A3.5,10)$$

Diese Gleichung, die auch folgendermaßen geschrieben werden kann

$$T_i(z) = t_i(z) + \sum_{j=1}^{3} F_{ij}(z)\, g_o(z)\, T_j(z) \qquad (A3.5,10)$$

wird die Faddeev-Gleichung für die T-Matrix genannt.
Die t_i sind die Zweiteilchen-T-Matrizen, die nun als Operatoren im Dreiteilchenraum aufzufassen sind.

Iteriert man diese Gleichung einmal, so verschwinden die δ-Funktionen vollständig, welche durch die Beschränkung der t_i-Operatoren auf ein Subsystem i entstanden sind. Der Kern hat folglich eine andere Schmidtnorm.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 g_o (t_2 + t_3) \\ t_2 g_o (t_3 + t_1) \\ t_3 g_o (t_1 + t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 g_o (t_2 + t_3) & t_1 g_o t_3 & t_1 g_o t_2 \\ t_2 g_o t_3 & t_2 g_o (t_3 + t_1) & t_2 g_o t_1 \\ t_3 g_o t_2 & t_3 g_o t_1 & t_3 g_o (t_1 + t_2) \end{pmatrix} \otimes$$

$$\otimes g_o \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \qquad (A3.5,11)$$

Die Kompaktheit des Kernes ist nach der Approximation fünfter Ordnung in einem geeigneten Banachraum für reelle Energien größer als eine Minimalenergie. Insofern lassen sich die üblichen Theoreme und Approximationen anwenden.

Die Faddeevgleichungen für die Resolvente berechnet man unter Beachtung der Faddeevgleichung /A3.5,2/.

$$G(z) = g_o(z) + \sum_{i=1}^{3} G_i(z) \qquad (A3.5,12)$$

mit

$$G_i(z) = g_o(z)\, T_i(z)\, g_o(z) \qquad \text{(A3.5,13)}$$

Man erhält

$$G_i = g_o\, t_i\, g_o + g_o \sum_{j=1}^{3} F_{ij}\, g_o\, T_j\, g_o \qquad \text{(A3.5,14)}$$

und mit

$$g_o\, t_i\, g_o = g_i - g_o \qquad \text{(A3.5,15)}$$

folgt

$$G_i(z) = g_i(z) - g_o(z) + \sum_{j=1}^{3} g_o(z)\, F_{ij}(z)\, G_j(z) \qquad \text{(A3.5,16)}$$

Die Streuzustände berechnen sich aus Gleichung /A3.,20/ durch Einsetzen der Resolventengleichung /A3.5,16/. Daraus resultiert

$$|\Psi^{\pm}_{\alpha\beta}\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \pm i\varepsilon \left\{ g_i(E \pm i\varepsilon) - g_o(E \pm i\varepsilon) + \sum_{j=1}^{3} g_o(E \pm i\varepsilon)\, F_{ij}(E \pm i\varepsilon)\, G_j(E \pm i\varepsilon) \right\} |\Phi_{\alpha\beta}\rangle \qquad \text{(A3.5,17)}$$

Die entsprechenden S- und T-Matrizen für die verschiedenen Fälle (drei freie Teilchen bzw. ein freies und zwei gebundene Teilchen) lassen sich eindeutig aus Gleichung /A3.5,17/ berechnen.

Anhang 4. Bezeichnugsweise und Formeln für relativistische Spinoren

4.1 Metrik und ε-Tensor

$$g^{00} = g_{00} = 1$$

$$g^{11} = g_{11} = g^{22} = g_{22} = g^{33} = g_{33} = -1$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu \qquad \text{(A4.1,1)}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

$$g^{\mu}{}_{\mu} = 4$$

Der ε-Tensor ist folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha\beta\gamma\delta \text{ eine gerade Permutation von 0123 darstellen} \\ -1 & \text{wenn } \alpha\beta\gamma\delta \text{ eine ungerade Permutation von 0123 darstellen} \\ 0 & \text{wenn 2 oder mehr gleiche Indices auftreten} \end{cases}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\beta\gamma\delta} = -6\, g$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -2(g^{\alpha}{}_{\mu}g^{\beta}{}_{\nu} - g^{\alpha}{}_{\nu}\, g^{\beta}{}_{\mu}) \qquad \text{(A4.1,2)}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\zeta\delta} = -(g^{\alpha}_{\mu}\, g^{\beta}_{\nu}\, g^{\nu}_{\xi} + g^{\alpha}_{\nu}\, g^{\beta}_{\mu}\, g^{\gamma}_{\xi} - g^{\alpha}_{\mu}\, g^{\beta}_{\xi}\, g^{\gamma}_{\nu} + g^{\beta}_{\mu}\, g^{\alpha}_{\xi}\, g^{\gamma}_{\nu} - g^{\alpha}_{\nu}\, g^{\beta}_{\xi}\, g^{\gamma}_{\mu} - g^{\beta}_{\nu}\, g^{\alpha}_{\xi}\, g^{\gamma}_{\mu})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(a_{\mu}b_{\alpha}c_{\beta}d_{\gamma}e_{\delta} + b_{\mu}c_{\alpha}d_{\beta}e_{\gamma}a_{\delta} + c_{\mu}d_{\alpha}e_{\beta}a_{\gamma}b_{\delta} + d_{\mu}e_{\alpha}a_{\beta}b_{\gamma}c_{\delta} + e_{\mu}a_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}d_{\delta}) = 0$$

$$\varepsilon^{klm} := \varepsilon^{0klm}$$

$$\varepsilon^{klm}\varepsilon^{ijm} = \delta^{ki}\delta^{lj} - \delta^{kj}\delta^{li} \qquad \text{(A4.1,3)}$$

$$\varepsilon^{klm}\varepsilon^{klm} = 6$$

$$\varepsilon^{klm}\varepsilon^{ilm} = 2\,\delta^{ki}$$

4.2 Spinalgebra

Die Paulimatrizen sind : $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$

mit $\{\sigma^i, \sigma^k\} = 2\,\delta^{ik}$ (A4.2,1)

In Matrixform erhält man

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$(\sigma^j)^\dagger = \sigma^j$$

$$(\sigma^j)^2 = 1$$

$$\vec{\sigma}\,\vec{\sigma} = 3 \qquad \text{(A4.2,2)}$$

$$\sigma^j \sigma^k = i\,\varepsilon^{jkl}\,\sigma^l + \delta^{jk}\cdot 1$$

$$\varepsilon^{jkl}\,\sigma^k\,\sigma^l = i\,\sigma^j$$

d.h. $\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = i\vec{\sigma}$

Zusammen mit der Einheitsmatrix $1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

bilden die σ^i eine vollständige Basis der Paulialgebra.
Sie werden folgendermaßen bezeichnet:

$$\{\sigma^\mu\} = \{1|, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\} \qquad \text{(A4.2,3)}$$

Dabei gelten die Relationen:

$(\sigma^\mu)^2 = 1$ (ohne Summe über μ)

$Sp(\sigma^\mu\sigma^\nu) = 0$ für $\mu \neq \nu$ (Orthogonalität)

$$\sum_{\mu=0}^{3} (\sigma^\mu)_{\alpha\beta}\,(\sigma^\mu)_{\gamma\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta} \text{ (Vollständigkeit)} \qquad \text{(A4.2,4)}$$

$Sp\,\sigma^\mu = 0$ für $\mu \neq 0$ sowie

$$(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$$

Die Vollständigkeitsrelation kann zur Umordnung von Matrixausdrücken benutzt werden. Durch Multiplikation mit Paulimatrizen findet man:

$$\begin{aligned}
2\,(1|)_{\alpha\delta}\,(\sigma^k)_{\gamma\beta} &= (\sigma^k)_{\alpha\beta}\,(1|)_{\gamma\delta} + (1|)_{\alpha\beta}\,(\sigma^k)_{\gamma\delta} + i\,\varepsilon^{klm}(\sigma^l)_{\alpha\beta}(\sigma^m)_{\gamma\delta} \\
2\,(\sigma^k)_{\alpha\delta}\,(1|)_{\gamma\beta} &= (\sigma^k)_{\alpha\beta}\,(1|)_{\gamma\delta} + (1|)_{\alpha\beta}\,(\sigma^k)_{\gamma\delta} - i\,\varepsilon^{klm}(\sigma^l)_{\alpha\beta}(\sigma^m)_{\gamma\delta} \\
2\,(\sigma^k)_{\alpha\delta}(\sigma^l)_{\gamma\beta} &= \delta^{kl}[(1|)_{\alpha\beta}(1|)_{\gamma\delta} - (\vec{\sigma})_{\alpha\beta}(\vec{\sigma})_{\gamma\delta}] + (\sigma^k)_{\alpha\beta}(\sigma^l)_{\gamma\delta} \\
&\quad + (\sigma^l)_{\alpha\beta}(\sigma^k)_{\gamma\delta} + i\varepsilon^{klm}[(\sigma^m)_{\alpha\beta}(1|)_{\gamma\delta} - (1|)_{\alpha\beta}(\sigma^m)_{\gamma\delta}]
\end{aligned} \qquad \text{(A4.2,5)}$$

Symmetrische Kombinationen $F_{\alpha\delta,\gamma\beta} = F_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ sind daher

$$(1|)\,(\sigma^k) + (\sigma^k)\,(1|)$$

$$(1|)\,(\sigma^k) - (\sigma^k)\,(1|) + i\,\varepsilon^{klm}\,(\sigma^l)\,(\sigma^m)$$

$$\delta^{kl}\,[(1|)\,(1|) - (\vec{\sigma})\,(\vec{\sigma})] + 2\,[(\sigma^k)(\sigma^l) + (\sigma^l)\,(\sigma^k)] \qquad \text{(A4.2,6)}$$

$$3\,(1|)\,(1|) + (\vec{\sigma})\,(\vec{\sigma})$$

Antisymmetrische Kombibinationen $F_{\alpha\delta,\gamma\beta} = -F_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ sind:

$$(1|)\ (\sigma^k) - (\sigma^k)\ (1|) - i\varepsilon^{klm}\ (\sigma^l)(\sigma^m)$$
$$(1|)\ (1|) - (\vec{\sigma})\ (\vec{\sigma}) = (\sigma^\mu)\ (\sigma_\mu) \qquad \text{(A4.2,7)}$$

4.3 Kovariante Schreibweise

Um die Vertauschungsrelationen der σ^μ kovariant zu schreiben, empfiehlt sich die Einführung einer weiteren Basis $\bar{\sigma}^\mu$ durch

$$\bar{\sigma}^\mu = ((1|),\ -\vec{\sigma}). \qquad \text{(A4.3,1)}$$

In diesem Fall ist

$$\sigma^\mu\ \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\ \bar{\sigma}^\mu = \bar{\sigma}^\mu\ \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\ \sigma^\mu = 2\ g^{\mu\nu} \qquad \text{(A4.3,2)}$$

Außerdem werden zwei antisymmetrische Matrixtensoren $\sigma^{\mu\nu}$, $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ definiert durch:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\ (\bar{\sigma}^\mu\ \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\ \sigma^\mu)$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\ (\sigma^\mu\ \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\ \bar{\sigma}^\mu) \qquad \text{(A4.3,3)}$$
$$\sigma^{0\kappa} = -\sigma^{\kappa 0} = \bar{\sigma}^{\kappa 0} = -\bar{\sigma}^{0\kappa} = i\,\sigma^\kappa$$
$$\sigma^{ki} = \bar{\sigma}^{kl} = \varepsilon^{klm}\ \sigma^m$$

Sind χ^1 und χ^2 zwei Weyhlspinoren, so transformieren sie sich bei der Lorentztransformation

$$(\chi^{1\dagger}\ \sigma^\mu\ \chi^2)\ ,\ (\chi^{1\dagger}\ \bar{\sigma}^\mu\ \chi^2) \qquad \text{wie Vektoren}$$
$$(\chi^{1\dagger}\ \sigma^{\mu\nu}\ \chi^2)\ ,\ (\chi^{1\dagger}\ \bar{\sigma}^{\mu\nu}\ \chi^2) \qquad \text{wie Tensoren} \qquad \text{(A4.3,4)}$$

Die (1) verhält sich demnach wie eine Vektorkomponente und nicht wie eine Matrix-Skalar-Komponente. Dieser Formalismus erlaubt, die Diractheorie als eine Theorie von zwei Weyhlspinoren zu schreiben. Folgende Formeln für Skalarprodukte mit Vierervektoren sind zu beachten:

$$(\bar{\sigma}^\mu a_\mu)\ (\sigma^\nu b_\nu) = (\sigma^\mu a_\mu)\ (\bar{\sigma}^\nu b_\nu) = a^\mu b_\mu \qquad \text{(A4.3,5)}$$
$$(\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)\ (\sigma^\nu a_\nu^\bullet) + (\bar{\sigma}^\mu a_\mu)\ (\sigma^\nu \partial_\nu^\bullet) = \partial_\mu(a^\mu{}_\bullet) + a^\mu \partial_\mu^\bullet + \sigma^{\mu\nu}\partial_\mu(a_\nu^\bullet)$$

4.4 Nützliche Formeln für kovariante Paulimatrizen

Formeln mit kontrahierten Indices sind:

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}^\mu \sigma_\mu = 4$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma_\mu = -2\,\sigma^\nu$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}_\mu = -2\,\bar{\sigma}^\nu$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho \bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma_\mu = 4\, g^{\nu\rho} \qquad \text{(A4.4,1)}$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho \bar{\sigma}^\tau \sigma_\mu = -2\sigma^\tau \bar{\sigma}^\rho \sigma^\nu$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\tau \bar{\sigma}_\mu = -2\bar{\sigma}^\tau \sigma^\rho \bar{\sigma}^\nu$$

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\sigma}_{\mu\nu} = 12$$

Reduktion von Produkten auf Basiseinheiten

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = g^{\mu\nu} - i\bar{\sigma}^{\mu\nu}$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho = g^{\mu\nu}\bar{\sigma}^\rho + g^{\nu\rho}\bar{\sigma}^\mu - g^{\mu\rho}\bar{\sigma}^\nu + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\sigma_\lambda$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho = g^{\mu\nu}\sigma^\rho + g^{\nu\rho}\sigma^\mu - g^{\mu\rho}\sigma^\nu - i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\bar{\sigma}_\lambda$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho \sigma^\sigma = g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - ig^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma} - ig^{\nu\rho}\sigma^{\mu\sigma} + ig^{\mu\rho}\sigma^{\nu\sigma}$$
$$-ig^{\mu\sigma}\sigma^{\nu\rho} - ig^{\rho\sigma}\sigma^{\mu\nu} + ig^{\nu\sigma}\sigma^{\mu\rho} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\cdot 1\!\!1$$

$$\bar{\sigma}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\rho} = i(g^{\mu\nu}\bar{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho}\bar{\sigma}^\nu) - \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_\lambda$$

$$\sigma^\mu \sigma^{\nu\rho} = i(g^{\mu\nu}\sigma^\rho - g^{\mu\rho}\sigma^\nu) + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\sigma}_\lambda \qquad \text{(A4.4,2)}$$

$$\sigma^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho = i(g^{\nu\rho}\bar{\sigma}^\mu - g^{\mu\rho}\bar{\sigma}^\nu) - \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_\lambda$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} \sigma^\rho = i(g^{\nu\rho}\sigma^\mu - g^{\mu\rho}\sigma^\nu) + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\sigma}_\lambda$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + ig^{\nu\rho}\sigma^{\mu\sigma} - ig^{\mu\rho}\sigma^{\nu\sigma} - ig^{\nu\sigma}\sigma^{\mu\rho}$$
$$+ig^{\mu\sigma}\sigma^{\nu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\cdot 1\!\!1$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + ig^{\nu\rho}\bar{\sigma}^{\mu\sigma} - ig^{\mu\rho}\bar{\sigma}^{\nu\sigma} - ig^{\nu\sigma}\bar{\sigma}^{\mu\rho}$$
$$+ ig^{\mu\sigma}\bar{\sigma}^{\nu\rho} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\cdot 1\!\!1$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho \bar{\sigma}^\sigma = g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - ig^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\rho\sigma} - ig^{\nu\rho}\bar{\sigma}^{\mu\sigma}$$
$$+ig^{\mu\rho}\bar{\sigma}^{\nu\sigma} - ig^{\mu\sigma}\bar{\sigma}^{\nu\rho} - ig^{\rho\sigma}\bar{\sigma}^{\mu\nu} + ig^{\nu\sigma}\bar{\sigma}^{\mu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\cdot 1\!\!1$$

Spuren von Produkten von Paulimatrizen

$$\mathrm{Sp}\ \sigma^{\mu} = \mathrm{Sp}\ \bar{\sigma}^{\mu} = 0 \quad \text{für } \mu \neq 0$$

$$\mathrm{Sp}\ \sigma^{0} = \mathrm{Sp}\ \bar{\sigma}^{0} = 2$$

$$\mathrm{Sp}\ \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} = \mathrm{Sp}\ \bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} = 2g^{\mu\nu} \qquad \text{(A4.4,3)}$$

$$\mathrm{Sp}\ \sigma^{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\ \bar{\sigma}^{\mu\nu} = 0$$

$$\mathrm{Sp}\ \bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\rho}\sigma^{\sigma} = 2(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma})$$

$$\mathrm{Sp}\ \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\rho}\bar{\sigma}^{\sigma} = 2(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma})$$

4.5 Diracalgebra

In der Diracschen Theorie sind gewisse Matrizen von Wichtigkeit, deren algebraische Eigenschaften hier aufgeführt werden sollen. Dabei wird von folgenden Vertauschungsrelationen für die vier Matrizen α_k , β (wobei k = 1,2,3)

$$[\alpha_k, \alpha_l]_+ = \alpha_k\alpha_l + \alpha_l\alpha_k = 2\delta_{kl}$$
$$[\alpha_k, \beta]_+ = 0 \quad \beta^2 = 1 \qquad \text{(A4.5,1)}$$

Gebrauch gemacht.
Aus diesen Forderungen folgt:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1$$
$$\mathrm{Sp}\ \alpha_k = \mathrm{Sp}\ \beta = 0 \qquad \text{(A4.5,2)}$$

Dabei ist vier die kleinste Zahl von Matrizen, welche diese Relationen erfüllen. Eine spezielle Darstellung unter Zuhilfenahme der Paulimatrizen σ_k lautet:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(0) \\ (0)(-1) \end{pmatrix} \qquad \alpha_k = \begin{pmatrix} (0) & (\sigma_k) \\ (\sigma_k) & (0) \end{pmatrix} \qquad \text{(A4.5,3)}$$

Durch die oben angegebenen Vertauschungsrelationen und die Zahl der Matrizen ist eine Algebra (Clifford Ring) bestimmt. Die vier Matrizen α_i, β bilden zusammen mit der Einheitsmatrix jedoch keine vollständige Basis der Algebra; d.h. nicht jede 4X4-Matrix kann - anders als bei den Paulimatrizen - linear auf α_i, β, 1| aufgespannt werden. Diese Sache ist trivial, denn die Algebra muß 16 Basiselemente haben und eine 4X4-Matrix hat 16 Matrixelemente.

Als sehr nützlich hat sich die Basis erwiesen, die man folgendermaßen erhält: Es werden 4 Matrizen γ^{μ} durch

$$\gamma^0 = \beta$$

$$\gamma^k = \beta\gamma_k = \begin{pmatrix} (0) & (\sigma_k) \\ -(\sigma_k) & (0) \end{pmatrix} \qquad \text{mit k=1,2,3 eingeführt.}$$

(A4.5,4)

Ihre Vertauschungsrelationen sind

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \cdot 1| \qquad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \qquad \text{(A4.5,5)}$$

γ^0 und γ^2 sind symmetrisch γ^1 und γ^3 antisymmetrisch. Ferner sind γ^0, γ^1 und γ^3 reell, γ^2 ist rein imaginär. Aus den γ-Matrizen werden durch Multiplikation folgende weitere Matrizen gebildet:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$
$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \qquad \text{(A4.5,6)}$$

Sie erfüllen die Relationen

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5^T = \gamma_5^* = \gamma_5 \qquad (\gamma_5)^2 = 1$$
$$[\gamma_5, \gamma^\mu]_+ = 0 \qquad \text{(A4.5,7)}$$
$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$$

Explizit ist

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} (0) & (1|) \\ (1|) & (0) \end{pmatrix} \qquad \sigma^{kl} = \epsilon^{klm}\begin{pmatrix} (\sigma^m) & (0) \\ (0) & (\sigma^m) \end{pmatrix} \qquad \text{(A4.5,8)}$$

$$\sigma^{0k} = ia_k = i\begin{pmatrix} (0) & (q_k) \\ (q_k) & (0) \end{pmatrix} \qquad -i\gamma_5\sigma^{0k} = \begin{pmatrix} (\sigma^k) & (0) \\ (0) & (\sigma^k) \end{pmatrix}$$

Eine vollständige Basis der Diracalgebra besteht dann aus den 16 Elementen $\Gamma^{(j)}$ $\quad j = 1, 2, 3 \ldots, 16$

$$\Gamma_a^{1} = 1| \,,\ \Gamma_b^{2\,3\,4\,5} = \gamma^\mu \,,\ \Gamma_c^{6\,7\,8\,9\,10\,11} = \sigma^{\mu\nu} \,,\ \Gamma_d^{12\,13\,14\,15} = \gamma^\mu\gamma_5 \,,\ \Gamma_e^{16} = i\gamma_5 \qquad \text{(A4.5,9)}$$

Erklärt man eine kontragradiente Basis $\Gamma_{(j)}$ dadurch, daß alle γ's mit unten stehenden Indices zu nehmen sind, also

$$\Gamma_a^1 = 1| \,,\ \Gamma_{2\,3\,4\,5}^b = \gamma_\mu \,,\ \Gamma_{6\,7\,8\,9\,10\,11}^c = \sigma_{\mu\nu} \,,\ \Gamma_{12\,13\,14\,15}^d = -\gamma_\mu\gamma_5 \,,\ \Gamma_{16}^e = -i\gamma_5 \qquad \text{(A4.5,10)}$$

so gelten folgende Beziehungen:

$$\Gamma^M \Gamma_M = 1 \quad \text{ohne Summe} \qquad \text{Sp}\,\Gamma^M\Gamma_{M'} = 0 \text{ mit } M \neq M' \quad \Big| \text{(Orthogonalität)}^{M=a,b,c,d,e}$$
$$\sum_{j=1}^{16} (\Gamma^j)_{\alpha\beta}(\Gamma_j)_{\gamma\delta} = 4\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\gamma\beta} \qquad \text{(Vollständigkeit)} \qquad \text{(A4.5,11)}$$
$$\text{Sp}\,\Gamma^j = 0 \quad \text{mit } j \neq 0$$

Durch eine unitäre Transformation

$$\Gamma^j \rightarrow \Gamma^{j'} = U\Gamma^j U^{-1} \qquad \text{(A4.5,12)}$$

ändert sich an den algebraischen Eigenschaften der Γ-Matrizen und an den mit ihnen gewonnenen physikalischen Resultaten nichts. Durch eine geeignete Wahl von U findet man in der Literatur andere Matrixdarstellungen, welche für bestimmte Zwecke geeigneter sind.

Die hier benutzte Matrixdarstellung hat insbesondere die praktische Eigenschaft

$$\Gamma^j := \gamma^0 \Gamma^{j\dagger} \gamma^0 = \Gamma^j \quad . \tag{A4.5,13}$$

Ferner soll auf eine nützliche Konsequenz der Vollständigkeitsrelation aufmerksam gemacht werden: Durch Multiplikation von ihr mit $(A\Gamma^k)_{\rho\alpha} B_{\tau\gamma} \Gamma^l_{\beta\sigma}$ und Ansetzen von Spinoren erhält man die Fierztransformation

$$(\bar{\psi}^1 A\, \Gamma^k \psi^2)(\bar{\psi}^3\, B\, \Gamma^l \psi^4) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{16} (\bar{\psi}^1\, A\, \Gamma^k \Gamma^j \Gamma^l \psi^4)(\bar{\psi}^3\, B\, \Gamma_j \psi^2) \tag{A4.5,14}$$

Bilineare Kovarianten

Sind ψ^1, ψ^2 zwei beliebige Diracspinoren, so kann man zeigen, daß bei Lorentztransformation

$(\bar{\psi}^1\ \psi^2)$	als Skalar
$(\bar{\psi}^1\ \gamma^\mu\ \psi^2)$	als kovarianter Vektor
$(\bar{\psi}^1\ \sigma^{\mu\nu}\ \psi^2)$	als kovarianter antisymmetrischer Tensor
$(\bar{\psi}^1\ \gamma^\mu\gamma_5\ \psi^2)$	als Pseudovektor
$(\bar{\psi}^1\ i\gamma_5\ \psi^2)$	als Pseudoskalar

(A4.5,15)

transformiert wird. Für $\psi^1 = \psi^2$ sind diese Größen außerdem hermitesch. Ansonsten bedeutet hermitesche Konjugation dasselbe wie das Vertauschen von 1 und 2 .

Quadrilineare Invarianten

Seien ψ^1, ψ^2 , ψ^3, ψ^4 vier beliebige Diracspinoren. Setzt man fünf Matrixkovarianten

$$S = 1,\ V_\mu = \gamma_\mu,\ T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau}\,\sigma_{\mu\nu},\ A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5,\ P = i\gamma_5 \tag{A4.5,16}$$

fest, so lautet die allgemeinste Invariante, die in jedem der ψ^j linear ist:

$$J = \bar{\psi}^1_\alpha \psi^2_\beta \bar{\psi}^3_\gamma \psi^4_\delta\, F_{\alpha\beta,\gamma\delta} \quad \text{wobei}$$
$$F_{\alpha\beta,\gamma\delta} = C_1 (S)_{\alpha\beta} (S)_{\gamma\delta} + C_2 (V^\mu)_{\alpha\beta} (V_\mu)_{\gamma\delta} + C_3 (T^{\mu\nu})_{\alpha\beta} (T_{\mu\nu})_{\gamma\delta} + C_4 (A^\mu)_{\alpha\beta} (A_\mu)_{\gamma\delta} + C_5 (P)_{\alpha\beta} (P)_{\gamma\delta} \tag{A4.5,17}$$

mit beliebigen Koeffizienten C_i ist. Sind alle ψ^i gleich und alle C_i reell, so ist J hermitesch. Man kann dann mittels

der Fierztransformation zeigen, daß

$$F_{\alpha\beta,\gamma\delta} = D_1(S)_{\alpha\delta}(S)_{\gamma\beta} + D_2(V^\mu)_{\alpha\delta}(V_\mu)_{\gamma\beta} + D_3(T^{\mu\nu})_{\alpha\delta}(T_{\mu\nu})_{\gamma\beta} + D_4(A^\mu)_{\alpha\delta}(A_\mu)_{\gamma\beta} + D_5(P)_{\alpha\delta}(P)_{\gamma\beta} \qquad (A4.5,18)$$

ist, wobei

$D_i = \sum_{j=1}^{5} \Lambda_{ij} C_j$ und

$$(\Lambda_{ij}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A4.5,19)$$

Daraus liest man auch das Verhalten einzelner Invarianten ab, indem man alle anderen C_i gleich Null setzt. Außerdem erkennt man, daß die Kombination $S_\cdot S + P_\cdot P$ und $\frac{1}{2}(V^\mu_\cdot V_\mu - A_\mu \cdot A^\mu)$ bei Fierztransformationen ineinander übergehen. Dabei gehen die Kombinationen (A4.5,20)

$$S_\cdot S + P_\cdot P + \frac{1}{2}(V^\mu V_\mu - A^\mu A_\mu)$$
$$S_\cdot S - P_\cdot P + \frac{1}{3} T^{\mu\nu}_\cdot T_{\mu\nu} \qquad (A4.5,21)$$

bei Fierztransformation in sich über (d.h. sie sind fierzsymmetrisch), während

$$S_\cdot S + P_\cdot P - \frac{1}{3}(V^\mu_\cdot V_\mu - A^\mu_\cdot A_\mu)$$
$$S_\cdot S - P_\cdot P - T^{\mu\nu}_\cdot T_{\mu\nu} \qquad (A4.5,22)$$
$$V^\mu_\cdot V_\mu + A^\mu_\cdot A_\mu$$

in ihr Negatives übergehen (d.h. fierzantisymmetrisch sind). Der allgemeine Pseudoskalar, der in jedem ψ^i linear ist, nimmt die Form an

$$\mathfrak{J} = \psi^1_\alpha \psi^2_\beta \psi^3_\gamma \psi^4_\delta \; \hat{F}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

mit

$$\hat{F}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = iC_1(S)_{\alpha\beta}(P)_{\gamma\delta} + C_2(V^\mu)(A_\mu) + iC_3(T^{\mu\nu})(\hat{T}_{\mu\nu}) + C_4(A^\mu)(V_\mu) - iC_5(P)_\cdot S \qquad (A4.5,23)$$

wobei es zweckmäßig ist, die Faktoren $\pm i$ in dieser Weise herauszuziehen. Für gleiche Spinoren ist $\mathfrak{J}$ unter geeigneten Annahmen über C_i (C_1, C_3, C_5 rein imaginär und C_2, C_4 reell) hermitesch. Der Pseudotensor

$\hat{T}_{\mu\nu} := \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}$ ist vom Tensor $T_{\mu\nu}$ nicht unabhängig, denn es gilt:

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{T}_{\rho\sigma} \qquad \hat{T}^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \qquad (A4.5,24)$$

Daher ist auch

$$(T^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\hat{T}^{\mu\nu})_{\gamma\delta} = (\hat{T}^{\mu\nu})_{\alpha\beta}(T^{\mu\nu})_{\gamma\delta} \quad . \tag{A4.5,25}$$

Mit der Fierztransformation zeigt man die Gültigkeit von

$$\hat{F}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = iD_1'(S)_{\alpha\delta}(P)_{\gamma\beta} + D_2'(V^\mu)(A_\mu) + iD_3'(T^{\mu\nu})(\hat{T}_{\mu\nu}) + D_4'(A^\mu)_\cdot(V_\mu) - iD_5'(P)(S) \tag{A4.5,26}$$

wobei die D_i' aus den C_i durch

$$D_i' = \sum_{j=1}^{5} \Lambda_{ij} C_j' \tag{A4.5,27}$$

mit der gleichen Matrix wie oben hervorgehen. Man kann in analoger Weise wie oben fierzsymmetrische beziehungsweise fierzantisymmetrische Kombinationen bilden.

In derselben Weise kann man Vektoren, Tensoren usw. konstruieren.

4.6 Matrizen für Spiegelungsoperatoren

Für die Spiegelungsoperationen werden zwei Matrizen B, C mit den Eigenschaften $C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$ und $C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5{}^T$ sowie $B\,\gamma^{\mu\nu}B^{-1} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ und $B\,\gamma_5 B^{-1} = -\gamma^0\gamma_5\gamma^0 = \gamma_5$ (A4.6,1)

benötigt. In unserer Matrixdarstellung werden diese Eigenschaften durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} C &= i\gamma^2\gamma^0 = -C^\dagger = -C^{-1} = -C^T = C \\ B &= i\gamma^1\gamma^3 = B^\dagger = B^{-1} = -B^T = -B \end{aligned} \tag{A4.6,2}$$

erfüllt. In anderen Darstellungen findet man die entsprechenden Matrizen durch Umrechnung. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} [B,C] &= 0 \\ [B,\gamma_5] &= 0 \\ [C,\gamma_5] &= 0 \\ BC &= i\gamma_5 \end{aligned} \tag{A4.6,3}$$

4.7 Nützliche Formeln mit Diracmatrizen

Formeln mit kontrahierten Indices

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \\ &\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta} \\ &\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha \\ &\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha \\ &\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma_\mu = 2(\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma + \gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\delta) \end{aligned} \tag{A4.7,1}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_{2n+1}}\gamma_{\mu} = -2\gamma^{\alpha_{2n+1}}\ldots\gamma^{\alpha_1}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_{2n}}\gamma_{\mu} = 2(\gamma^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_{2n}}\gamma^{\alpha_1} + \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_{2n}}\ldots\gamma^{\alpha_2})$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12 \qquad \text{(A4.7,1')}$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu} = -4\sigma^{\alpha\beta}$$

$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha}\sigma_{\mu\nu} = 0$$

Formeln ohne kontrahierte Indices

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{123} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{123} \\ -\sigma_{123} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A4.7,2)}$$

$$i\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$i\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$i\gamma_3\gamma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0\gamma_{123} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{123} \\ \sigma_{123} & 0 \end{pmatrix} = \alpha$$

$$\gamma_5\gamma_0 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5\gamma_{123} = -i\begin{pmatrix} \sigma_{123} & 0 \\ 0 & -\sigma_{123} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5\gamma_0$$

$$\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_1\gamma_5$$

$$\gamma_2\gamma_0\gamma_1 = -\gamma_2\gamma_5$$

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3\gamma_5$$

(A4.7,3)

Produkte mit Vierervektoren

$$\gamma_1 \not{a} \gamma_1 = \not{a} + 2\, a_1 \gamma_1$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma_\mu = -2\not{a}$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma_\mu = 4\, ab \qquad (A4.7,4)$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma_\mu = -2\, \not{c}\not{b}\not{a}$$

γ-Matrizen im Exponenten

$$e^{\frac{u}{2}\gamma_0\gamma_1} = \cosh(u/2) + \gamma_0\gamma_1 \sinh(u/2)$$

$$e^{(u/2)\gamma_1\gamma_2} = \cos(u/2) + \gamma_1\gamma_2 \sin(u/2)$$

$$e^{-(u/2)\gamma_0\gamma_3}\, \gamma_0 e^{(u/2)\gamma_0\gamma_3} = \gamma_0 \cosh u + \gamma_3 \sinh u \qquad (A4.7,5)$$

$$e^{-(u/2)\gamma_0\gamma_3}\, \gamma_3 e^{(u/2)\gamma_0\gamma_3} = \gamma_3 \cosh u + \gamma_0 \sinh u$$

$$e^{-(u/2)\gamma_0\gamma_3}\, \gamma_2 e^{(u/2)\gamma_0\gamma_3} = \gamma_2$$

$$e^{-(u/2)\gamma_0\gamma_3}\, \gamma_1 e^{(u/2)\gamma_0\gamma_3} = \gamma_1$$

4.8 Spuren von Produkten

Die Spur einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen ist Null.
Dabei sind γ_5 wie vier und $\sigma^{\mu\nu}$ wie zwei γ-Matrizen zu zählen.
Für Spuren einer geraden Anzahl gilt:

$$\mathrm{Sp}\, \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Sp}\, \sigma^{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\, \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = 0$$

$$\mathrm{Sp}\, \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \qquad (A4.8,1)$$

$$\mathrm{Sp}\, \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu = 0$$

$$\mathrm{Sp}\, \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = -4i\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\mathrm{Sp}\, \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma} = 4(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma})$$

Für das Produkt von n γ-Matrizen (n gerade) erhält man:

$$\mathrm{Sp}\, \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_n} = \mathrm{Sp}\, \gamma^{\alpha_n} \gamma^{\alpha_{n-1}} \dots \gamma^{\alpha_1} \qquad (A4.8,2)$$

$$= g^{\alpha_1\alpha_2} \mathrm{Sp}\, \gamma^{\alpha_3} \dots \gamma^{\alpha_n} - g^{\alpha_1\alpha_3}\, \mathrm{Sp}\, \gamma^{\alpha_2} \gamma^{\alpha_4} \dots \gamma^{\alpha_n}$$

$$+ g^{\alpha_1\alpha_n}\, \mathrm{Sp}\, \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{n-1}}$$

Mit dieser Rekursionsformel läßt sich im Prinzip jede Spur ausrechnen. In der Praxis ist es jedoch meist zweckmäßiger, einige Faktoren zusammenzufassen und die im Abschnitt A4.7 angegebenen Formeln zu benutzen.

Wichtige Relationen mit Matrizen, die in den Vertexausdrücken vorkommen:

$$(-\lambda'_2\ \gamma'^{\mu}\ \beta)_{\alpha\alpha'}\ \lambda^F_{\alpha'} = \lambda^F_{\alpha}\ (\gamma^{\mu}\ \beta)_{\alpha\alpha'}$$

$$(-\lambda'_2\ \gamma'^{\mu}\ \beta)_{\alpha\alpha'}\ \lambda^A_{\alpha'} = \lambda^A_{\alpha}\ (\gamma^{\mu}\ \beta)^T_{\alpha\alpha'}$$

$$(-\lambda'_2\ \gamma'^{\mu}\ \beta)^T_{\alpha\alpha'}\ \lambda^F_{\alpha'} = \lambda^F_{\alpha}\ (\gamma^{\mu}\ \beta)_{\alpha\alpha'}$$

$$(-\lambda'_2\ \gamma'^{\mu}\ \beta)^T_{\alpha\alpha'}\ \lambda^A_{\alpha'} = \lambda^A_{\alpha}\ (\gamma^{\mu}\ \beta)^T_{\alpha\alpha'}$$

$$(-i\ \lambda'_2\ \beta)_{\alpha\alpha'}\ \lambda^F_{\alpha'} = \lambda^F_{\alpha}\ \beta_{\alpha\alpha'}$$

$$(-i\ \lambda'_2\ \beta)_{\alpha\alpha'}\ \lambda^A_{\alpha'} = \lambda^A_{\alpha}\ (-\beta^T_{\alpha\alpha'}) = \lambda^A_{\alpha}\ (-\beta_{\alpha\alpha'})$$

$$(-i\ \lambda'_2\ \beta)_{\alpha\alpha'}\ \lambda^F_{\alpha'} = -\lambda^F_{\alpha}\ \beta_{\alpha\alpha'}$$

$$(-i\ \lambda'_2\ \beta)_{\alpha\alpha'}\ \lambda^A_{\alpha'} = \lambda^A_{\alpha}\ \beta_{\alpha\alpha'}$$

$$(\beta\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = i\ \lambda^F_{\alpha}\ (\beta\ \gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$$

$$(\beta\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = -i\ \lambda^A_{\alpha}\ (\beta\ \gamma^{\mu})^T_{\alpha\beta}$$

$$(\beta\ \gamma_5\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = i\ \lambda^F_{\alpha}\ (\beta\ \gamma_5\ \gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$$

$$(\beta\ \gamma_5\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = -i\ \lambda^A_{\alpha}\ (\beta\ \gamma_5\ \gamma^{\mu})^T_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_2\ \overset{+}{\tau}')_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = -\lambda^F_{\alpha}\ \overset{+}{\tau}_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_2\ \overset{+}{\tau}')_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = -\lambda^A_{\alpha}\ \overset{+T}{\tau}_{\alpha\beta} \qquad \overset{+T}{\tau} = C_{\tau}\ \overset{+}{\tau}\ C_{\tau}$$

$$(\lambda'_2\ \overset{+}{\tau}'\ \beta\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = -i\ \lambda^F_{\alpha}\ (\overset{+}{\tau}\ \beta\ \gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_2\ \overset{+}{\tau}'\ \beta\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = i\ \lambda^A_{\alpha}\ (\overset{+}{\tau}\ \beta\ \gamma^{\mu})^T_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_2\ \overset{+}{\tau}'\ \beta\ \gamma_5\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = -i\ \lambda^F_{\alpha}\ (\overset{+}{\tau}\ \beta\ \gamma_5\ \gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_2\ \overset{+}{\tau}'\ \beta\ \gamma_5\ \gamma'^{\mu})_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = i\ \lambda^A_{\alpha}\ (\overset{+}{\tau}\ \beta\ \gamma_5\ \gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_1\ \overset{+}{\tau}')_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = \lambda^A_{\alpha}\ (C_{\tau}\ \overset{+}{\tau})_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_1\ \overset{+}{\tau}')_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = \lambda^F_{\alpha}\ (C_{\tau}\ \overset{+T}{\tau})_{\alpha\beta} \qquad \text{(A4.8,3)}$$

$$(\lambda'_1\ \overset{+}{\tau}')_{\alpha\beta}\ \lambda^F_{\beta} = i\ \lambda^A_{\alpha}\ (C_{\tau}\ \overset{+}{\tau})_{\alpha\beta}$$

$$(\lambda'_1\ \overset{+}{\tau}')_{\alpha\beta}\ \lambda^A_{\beta} = -i\ \lambda^F_{\alpha}\ (C_{\tau}\ \overset{+T}{\tau})_{\alpha\beta}$$

Anhang 5. Integral- und Formelsammlung

Dieser Anhang enthält die Ausrechnung einiger Integrale, die bei der Berechnung der Eigenwertmassen der Elementarteilchen von großen Nutzen sind. Ausgangspunkt ist das folgende Integral:

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 - L + i\varepsilon)} = \int dk_0 \int d^3K \frac{1}{(k_0^2 - (K^2 + L) + i\varepsilon)}$$

$$= \int d^3K \int dk \frac{}{(k_0 - \sqrt{K + L})(k_0 - \sqrt{K + L})}$$

Es ergibt sich nach der Integration im Komplexen

$$= \int d^3K \frac{2i\pi}{2(K^2 + L)^{1/2}}$$

mit $d^3K = 4\pi K^2 dK$ erhält man:

$$= 4\pi \int_0^\infty dK \frac{\pi i K^2}{(K^2 + L)^{1/2}} = \lim_{a \to \infty} \int_0^a dK \frac{4i\pi^2 K^2}{(K^2 + L)^{1/2}}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \{ 4\pi^2 i [\frac{K}{2}(K^2 + L)^{1/2} - \frac{L}{2} \ln (K + (K^2 + L)^{1/2}) - \frac{L}{2} \ln (2)] \Big/_0^a \}$$

Für große Werte von a kann man $(a^2 + L)^{1/2}$ durch a und $L \ln(a + (a^2 + L)^{1/2})$ durch $L \ln(2a + L^{1/2})$ abschätzen. (A5.,1)

$$= \lim_{a \to \infty} \{ 4\pi^2 i [\frac{a}{2} - \frac{L}{2} \ln(a) - L \ln(2) + \frac{1}{4} L \ln(L)] \}$$

Dieser Ausdruck divergiert quadratisch in a.
Durch Differentiation des Integrals nach L kann folgendes Integral berechnet werden:

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 + L + i\varepsilon)^2} = \lim_{a \to \infty} \{4\pi^2 i [\frac{1}{2} \ln(a) - \frac{1}{4} \ln(L) + Ln(2) - \frac{1}{4}]\}$$

Dieses Integral divergiert nur noch logarithmisch. (A5.,2)
Eine weitere Differentiation nach L ergibt

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 + L + i\varepsilon)^3} = + \frac{2i\pi^2}{4L} \qquad (A5.,3)$$

Substituiert man in /A3.,1/ k durch k-p und schreibt für $p^2 - L$ nun Δ, so erhält man:

$$\int d^4k \frac{1}{[(k-p)^2 - L + i\varepsilon]} = \int d^4k \frac{1}{[k^2 - 2pk + \Delta]}$$

$$= \int d^3K \int dk \frac{1}{(k^2 - K^2 - 2pk + 2PK + \Delta)}$$

$$= \int d^3K \int dk \frac{1}{[(k-p) - (p^2 + K^2 - 2PK - \Delta)^{1/2}][(k-p) + (p^2 + K^2 - 2PK - \Delta)^{1/2}]}$$

$$= \int d^3K \frac{i\pi}{[(K-P)^2 + p^2 - \Delta]^{1/2}}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \int_0^a dK \frac{\pi^2 4i K^2}{[(K-P)^2 + p^2 - \Delta]^{1/2}}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \{ 2i\pi^2 [(K+3P)[(K-P)^2 + p^2 - \Delta]^{1/2} + (2P^2 - p^2 + \Delta) \ln 2 + (2P^2 - p^2 + \Delta) \ln([(K-P)^2 + p^2 - \Delta]^{1/2} + K - P)] \Big/_0^a \}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \{ 2i\pi^2 [(a+3P)[(a-P)^2 + p^2 - \Delta]^{1/2} - 3P(P^2 + p^2 - \Delta)^{1/2} + (2P^2 - p^2 + \Delta) \ln 2 + (2P^2 - p^2 + \Delta) \ln([(a-P)^2 + p^2 - \Delta]^{1/2} + a - P) - (2P^2 - p^2 + \Delta) \ln([P^2 + p^2 - \Delta]^{1/2} - P)] \}$$

Für P = 0 und a → ∞ folgt:

$$= \lim_{a \to \infty} \{ 2i\pi^2 [a^2 + (-p^2 + \Delta) \ln 2 + c_1 \ln(2a) - (-p^2 + \Delta) \ln(p^2 - \Delta)^{1/2}] \} \qquad \text{(A5.,4)}$$

Zweimalige Differentiation des Integrals /A5.,4/ nach Δ ergibt:

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 - 2pk + \Delta)^3}$$

$$= i\pi^2 \frac{d}{d\Delta} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \ln(p^2 - \Delta) - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{i\pi^2}{2} \frac{1}{(p^2 - \Delta)} \qquad \text{(A5.,5)}$$

Wird das Integral /A5.,4/ einmal nach Δ und einmal nach p differentiert, so erhält man:

$$\int d^4k \frac{k^\sigma}{(k^2 - 2pk + \Delta)} = \frac{i\pi^2}{2} \frac{p^\sigma}{p^2 - \Delta} \qquad \text{(A5.,6)}$$

Zweimalige Differentiation des Integrals /A5.,4/ ergibt:

$$\int d^4k \frac{k^\sigma k^\nu}{(k^2 - 2pk + \Delta)^3}$$

$$= \frac{i\pi^2}{4} \frac{d}{dp_\nu} [-2p^\sigma \ln 2 + p^\sigma \ln(p^2-\Delta) + p^\sigma]$$

$$= \frac{i\pi^2}{2} [\frac{1}{2} \delta_{\sigma\nu} (1 - 2 \ln 2 + \ln(p^2 - \Delta)) + \frac{2 p^\sigma p^\nu}{p^2 - \Delta}] \qquad \text{(A5.,7)}$$

Für p = 0 erhält man demnach:

$$\int d^4k \frac{k^\sigma k^\nu}{(k^2 - L + i\varepsilon)^3}$$

$$= \frac{i\pi^2}{2} [\frac{1}{2} \delta_{\sigma\nu} (1 - 2 \ln 2 + \ln(L))] \qquad \text{(A5.,8)}$$

Faßt man die Integrale /A5.,3 / und /A5.,6/ zusammen, so erhält man:

$$\int d^4k \frac{(1; k^\sigma)}{(k^2 \pm L + i\varepsilon)^3} = \pm \frac{i\pi^2}{2} \frac{(1;0)}{L} \qquad \text{(A5.,9)}$$

Im folgenden wird von diesem Integral ausgegangen. Für k^σ im Zähler erhält man eine ungerade Funktion; insofern wird das Integral = 0. Steht im Zähler eine 1, so ergibt sich:

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 \pm L + i\varepsilon)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \int d^3K \, dw \, [w^2 + i\varepsilon + (\pm L - K^2)]^{-3}$$

Für $\varepsilon << L+K^2$ hat man Pole an den Stellen $w = \pm[(\mp L + K^2)^{1/2} - i\varepsilon]$, und die Integration ergibt:

$$\int dw [w^2 + i\varepsilon + (\pm L - K^2)]^{-1} = 2\pi i [-2(\mp L + K^2)^{1/2}]^{-1}$$

Differentiert man zweimal nach L, so erhält man:

$$\int dw\,[\,w^2 + i\varepsilon + (\pm L - K^2)\,]^{-3} = \frac{6\pi}{16i}\,(\mp L + K^2)^{-5/2}$$

Die noch verbleibenden Integrationen liefern:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int d^3K\,(\mp L + K^2)^{-5/2} = 4\pi \int_0^{\infty}(\mp L + K^2)^{-5/2}\,K^2\,dK$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3L}$$

Ersetzt man in /A5.,9/ k durch k-p , so erhält man:

$$\int d^4k\,\frac{(1;k^\sigma)}{(k^2-2pk-\Delta)^3} = -\frac{i\pi^2\,(1;p^\sigma)}{2(p^2+\Delta)} \qquad \text{(A5.,10)}$$

Differentiation nach Δ ergibt:

$$\int d^4k\,\frac{(1;k^\sigma)}{(k^2-2pk-\Delta)^4} = +\frac{i\pi^2\,(1;p^\sigma)}{6(p^2+\Delta)^2} \qquad \text{(A5.,11)}$$

Differentiation nach p^ν :

$$6\int d^4k\,\frac{(k^\nu)}{(k^2-2pk-\Delta)^4} = \frac{i\pi^2\,2p^\nu}{2\,(p^2+\Delta)^3}$$

$$6\int d^4k\,\frac{k^\sigma k^\nu}{(k^2-2pk-\Delta)^4} = -\frac{i\pi^2}{2}\left[\frac{-p^\sigma\,2p^\nu}{(p^2+\Delta)^3} + \frac{\delta_{\sigma\nu}}{(p^2+\Delta)}\right] \qquad \text{(A5.,12)}$$

Faßt man zusammen, so erhält man:

$$\int d^4k\,\frac{(1;k^\sigma;k^\sigma k^\nu)}{(k^2-2pk-\Delta)^4} = \frac{i\pi^2\,[\,(1;p^\sigma;p^\sigma p^\nu) - \frac{1}{2}\delta_{\sigma\nu}(p^2+\Delta)\,]}{(p^2+\Delta)^3} \qquad \text{(A5.,13)}$$

.....

und für p = 0 folgt schließlich

$$\int d^4k\,\frac{(1;k^\sigma;k^\sigma k^\nu)}{(k^2-\Delta)^4} = \frac{i\pi^2\,(1;0;-0.5\Delta)}{6\Delta^2} \qquad \text{(A5.,14)}$$

.....

Wird von /A5.,10/ ausgegangen, so erhält man durch Differentiation nach Δ bzw. p :

$$\int d^4k\,\frac{(1;k^\sigma;k^\sigma k^\nu)}{(k^2-2pk-\Delta)^5} = -\frac{i\pi^2}{12}\,\frac{(1;p^\sigma;p^\sigma p^\nu)}{(p^2+\Delta)^3} \qquad \text{(A5.,15)}$$

für p = 0 :

$$\int d^4k\,\frac{(1;k^\sigma;k^\sigma k^\nu)}{(k^2-\Delta)^5} = \frac{-i\pi^2(1;0;-0.25\Delta)}{12\ \Delta^3} \qquad \text{(A5.,16)}$$

.....

Anhang 6. Die Kovariante Ableitung

Unter Berücksichtigung des Äquivalenzprinzips kann man in jedem beliebigen Punkt X einen Satz von Koordinaten ξ^{α} aufstellen, die lokal inertial in X sind. Die Metrik in jedem nichtinertialen Koordinatensystem ist gegeben durch

$$g_{\mu\nu} = V^{\alpha}{}_{\mu}(x)\ V^{\beta}{}_{\nu}(x)\ \eta_{\alpha\beta} \qquad (A6.,1)$$

wobei

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(x) = \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x=X}$$

Die partiellen Ableitungen $V^{\alpha}{}_{\mu}$ ändern sich unter der Transformation $x^{\mu} \to x'^{\mu}$ wie folgt:

$V^{\alpha}{}_{\mu} \to V'^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\ V^{\alpha}{}_{\nu}$. Wegen ihres Transformationsverhaltens als vier kovariante Vektorfelder werden die $V^{\alpha}{}_{\mu}$ als Tetrapode, Vierbein oder Tetrade bezeichnet.

Bei der Kontraktion von Vektorfeldern $A^{\mu}(x)$ mit den vier kovarianten Vektorfeldern $V^{\alpha}{}_{\mu}$ erhält man vier Skalare

$$*A^{\alpha} = V^{\alpha}{}_{\mu}\ A^{\mu} \quad \text{bzw.} \quad *A_{\alpha} = V_{\alpha}{}^{\mu}\ A_{\mu} \qquad (A6.,2)$$

Analog gilt für Tensorfelder

$$*B^{\alpha}{}_{\beta} = V^{\alpha}{}_{\mu}\ V_{\beta}{}^{\nu}\ B^{\mu}{}_{\nu} \quad \text{wobei} \qquad (A6.,3)$$

$V_{\beta}{}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} V^{\alpha}{}_{\mu}$. Berücksichtigt man /A6.,1/, so ergibt sich

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = V_{\beta}{}^{\mu}\ V^{\beta}{}_{\nu} \quad \text{und} \quad \delta^{\alpha}{}_{\beta} = V^{\alpha}{}_{\mu}\ V_{\beta}{}^{\mu} \ . \qquad (A6.,4)$$

Um die Transformation eines Spinors von einem Minkowskiraum in einen gekrümmten Raum darzustellen, führt man einen Operator ein, der nicht nur ein Koordinatenskalar wie die Größen * in /A6.,2+3/, sondern auch ein Lorentzvektor ist. Dabei gilt für eine Lorentztransformation $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)$:

$$D_{\alpha}\ \psi(x) \to \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x)\ L(\Lambda(x))\ D_{\beta}\ \psi(x) \ , \qquad (A6.,5)$$

wobei $L(\Lambda(x))$ die Matrixdarstellung der Lorentzgruppe ist. Dieser Differentialoperator D_{α} hat dann die Form

$$D_{\alpha} := V_{\alpha}{}^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu}\right] \quad \text{wobei } \Gamma_{\mu} \text{ eine Matrix ist, die} \qquad (A6.,6)$$

folgender Lorentztransformationsregel unterliegt:

$$\Gamma_{\mu}(x) \to L(\Lambda(x))\ \Gamma_{\mu}(x)\ D^{-1}(\Lambda(x)) - \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} L(\Lambda(x))\right] D^{-1}(\Lambda(x)) \qquad (A6.,7)$$

Zur Bestimmung von $\Gamma_\mu(x)$ berücksichtigt man, daß die Relation

$$\bar{D}\, e_\beta = \omega^\alpha{}_\beta e_\alpha \quad \text{(mit } \bar{D} \text{ dem absoluten Differential)} \qquad \text{(A6.,8)}$$

der Basisvektoren in benachbarten Punkten eine infinitesimale Lorentztransformation

$$\Lambda^\alpha{}_\beta(x) = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta(x) \quad (\text{mit } \omega_{\alpha\beta}(x) = -\omega_{\beta\alpha}(x)) \qquad \text{(A6.,9)}$$

sein muß. So erhält man für $L(\Lambda(x))$ unter dieser Transformation

$$L(1-\omega(x)) = 1 + 0.5\, \omega^{\alpha\beta}(x)\, \sigma_{\alpha\beta} \text{ wobei } \sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha} \qquad \text{(A6.,10)}$$

und

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\, \sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\, \sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\, \sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\, \sigma_{\gamma\beta} \qquad \text{(A6.,11)}$$

Hiermit transformieren sich die Matrix $\Gamma_\mu(x)$

$$\Gamma_\mu(x) \to \Gamma_\mu(x) + 0.5\, \omega^{\alpha\beta}(x)\, [\sigma_{\alpha\beta}, \Gamma_\mu(x)] - 0.5\, \sigma_{\alpha\beta}\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \omega^{\alpha\beta}(x) \qquad \text{(A6.,12)}$$

und das Vierbein

$$V^\alpha{}_\nu(x) \to V^\alpha{}_\nu(x) + \omega^\alpha{}_\beta(x)\, V^\beta{}_\nu(x) \quad . \text{ Unter Berücksichtigung} \qquad \text{(A6.,13)}$$

von /A6.,4/ erhält man folgendes Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} V_\beta{}^\nu(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V_{\alpha\nu}(x) \to\ & V_\beta{}^\nu(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V_{\alpha\nu}(x) \\ & + \omega_\beta{}^\gamma(x)\, V_\gamma{}^\nu(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V_{\alpha\nu}(x) \\ & + \omega_\alpha{}^\gamma(x)\, V_\beta{}^\nu(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V_{\gamma\nu}(x) \\ & + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \omega_{\alpha\beta}(x) \end{aligned} \qquad \text{(A6.,14)}$$

Beim Durchmultiplizieren mit $\sigma^{\alpha\beta}$ unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Kommutatorregeln /A6.,11/ ergibt sich

$$\Gamma_\mu(x) = 0.5\, \sigma^{\alpha\beta}\, V_\alpha{}^\nu(x) \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V_{\beta\nu}(x)\right] \qquad \text{(A6.,15)}$$

Die kovariante Ableitung lautet dann schließlich:

$$D_\alpha = V_\alpha{}^\mu\, \frac{\partial}{\partial x^\mu} + 0.5\, \sigma^{\beta\gamma}\, V_\beta{}^\nu\, V_\alpha{}^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V_{\gamma\nu}\right] \qquad \text{(A6.,16)}$$

Anhang 7 Übergang von der T-Matrix zum totalen Wirkungsquerschnitt

In diesem Anhang halte ich mich in den wesentlichen Punkten an die von Phillip in /D5/ gemachten Ausführungen.

Nach /B 24/ lautet der Wirkungsquerschnitt für den Streuprozeß:

$$\sigma_{ab} = \frac{(2\pi)^4\, \delta^4(p_a - p_b)\ |T_{ab}|^2}{\rho_{b_1}\, \rho_{b_2}\, \rho_{a_1}\, \rho_{a_2}\ |v_{b_1} - v_{b_2}|} \qquad (A7.,1)$$

Hierbei bedeuten ρ_{b_i} und ρ_{a_i} die Teilchendichten und $|v_{b_1} - v_{b_2}|$ die Relativgeschwindigkeit der einlaufenden Teilchen bezogen auf den Normalenvektor n.

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt für 2 auslaufende Teilchen, deren Impulse im Intervall $d^3p_{a_j}$ um p_{a_j} liegen, erhält man aus dem Wirkungsquerschnitt /A7.,1/ durch Multiplikation mit

$$\prod_{j=1}^{2} (2\pi)^{-3}\ d^3p_{a_j} \ . \qquad (A7.,2)$$

Die Faktoren $(2\pi)^{-3}$ stammen dabei von der Phasenraumnormierung. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist somit:

$$d\sigma_{ab} = \frac{(2\pi)^4\ \delta^4(p_a - p_b)\ |T_{ab}|^2\ d^3p_{a_1}\ d^3p_{a_2}}{\rho_{b_1}\, \rho_{b_2}\, \rho_{a_1}\, \rho_{a_2}\ |v_{b_1} - v_{b_2}|\ (2\pi)^6} \qquad (A7.,3)$$

Durch Integration über die Impulse der auslaufenden Teilchen erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{ab} = \int d\sigma_{ab} \qquad (A7.,4)$$

Die der Normierung entsprechenden feldtheoretischen Dichten freier Teilchen lauten:

$$\rho_{a_i} = (2\pi)^{-3}\ (n\, p_{a_i}) \ ; \ \rho_{b_i} = (2\pi)^{-3}\ (n\, p_{b_i}) \qquad (A7.,5)$$

Beachtet man, daß relativistisch forminvariante Ausdrücke mit beliebigen Normalenvektoren n in jedem Bezugssystem auswertbar sind, so kann man die folgenden Bedingungen wählen:

Mit dem speziellen Normalenvektor $n_s = \frac{p_a}{\sqrt{p_a^2}}$

und im Gesamtschwerpunktsystem mit einem $n_s = (1,0,0,0)$ erhält man unter Beachtung der Mandelstamvariablen

$$
\begin{aligned}
s &= (p_{b_1} + p_{b_2})^2 = (p_{a_1} + p_{a_2})^2 \\
t &= (p_{b_1} - p_{a_1})^2 = (p_{b_2} - p_{a_2})^2 \\
u &= (p_{b_1} - p_{a_2})^2 = (p_{b_2} - p_{a_1})^2
\end{aligned}
\qquad \text{(A7.,6)}
$$

$$
s + t + u = p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2 + p_{b_1}^2 + p_{b_2}^2
$$

schließlich:

$$
(np_{b_1})(np_{b_2})\,|v_{b_1} - v_{b_2}| = \sqrt{p_{b_1}^{\circ 2} - p_{b_1}^2}\;|p_{b_1}^\circ + p_{b_2}^\circ| \qquad \text{(A7.,7)}
$$

Nach /B 24/ gilt für die Energien im Schwerpunktsystem:

$$
p_{b_1}^\circ = \frac{s + (p_{b_1}^2 - p_{b_2}^2)}{2\sqrt{s}}
$$

$$
p_{b_2}^\circ = \frac{s - (p_{b_1}^2 - p_{b_2}^2)}{2\sqrt{s}} \qquad \text{(A7.,8)}
$$

$$
p_{b_1}^\circ + p_{b_2}^\circ = \sqrt{s}
$$

$$
\sqrt{p_{b_1}^{\circ 2} - p_{b_1}^2} = \frac{\sqrt{(s - p_{b_1}^2 - p_{b_2}^2)^2 - 4\,p_{b_1}^2\,p_{b_2}^2}}{2\sqrt{s}}
$$

setzt man /A7.,8/ in /A7.,7/ ein, so erhält man für /A7.,4/:

$$\sigma(a,b) = 2\,(2\pi)^{10} \int \frac{d^3p_{a_1}\; d^3p_{a_2}\; \delta^4(p_a - p_b)\;\; |T_{ab}|^2}{\sqrt{p^2_{a_1} + P^2_{a_1}}\;\sqrt{p^2_{a_2} + P^2_{a_2}}\;\sqrt{(s - p^2_{b_1} - p^2_{b_2})^2 - 4\,p^2_{b_1}p^2_{b_2}}}$$

$$= \int d\Omega \int_0^\infty dP_{a_1}\; P^2_{a_1}\; \frac{\delta(\sqrt{s} - \sqrt{p^2_{a_1} + P^2_{a_1}} - \sqrt{p^2_{a_2} + P^2_{a_1}})\;|T_{ab}|^2\;\; 2\,(2\pi)^{10}}{\sqrt{p^2_{a_1} + P^2_{a_1}}\;\sqrt{p^2_{a_2} + P^2_{a_1}}\;\sqrt{(s - p^2_{b_1} - p^2_{b_2})^2 - 4p^2_{b_1}p^2_{b_2}}}$$

$$= 2\,(2\pi)^{10} \int d\Omega\; \frac{\theta(\sqrt{s} - \sqrt{p^2_{a_1}} - \sqrt{p^2_{a_2}})\sqrt{(s - p^2_{a_1} - p^2_{a_2})^2 - 4\,p^2_{a_1}p^2_{a_2}}}{\sqrt{(s - p^2_{b_1} - p^2_{b_2})^2 - 4\,p^2_{b_1}p^2_{b_2}}\;\; 2\,s}\;|T_{ab}|^2$$

(A7.,9)

Ersetzt man die Integration über Omega durch eine Integration über die Mandelstamvariable t, so erhält man:

$$\sigma(a,b) \int_{t_1}^{t_2} dt\;\; \frac{d\sigma}{dt}(s,t)$$

(A7.,10)

mit

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2\,(2\pi)^{11}\;\; \frac{\theta(\sqrt{s} - \sqrt{p^2_{a_1}} - \sqrt{p^2_{a_2}})\;|T_{ab}|^2}{(s - p^2_{b_1} - p^2_{b_2})^2 - 4\,p^2_{b_1}p^2_{b_2}}$$

und

$$t_{1/2} = -\frac{1}{2s}\left(s^2 - s(p^2_{a_1} + p^2_{a_2} + p^2_{b_1} + p^2_{b_2}) + (p^2_{a_1} - p^2_{a_2})(p^2_{b_1} - p^2_{b_2})\right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(s - p^2_{a_1} - p^2_{a_2})^2 - 4p^2_{a_1}p^2_{a_2}}\;\sqrt{(s - p^2_{b_1} - p^2_{b_2})^2 - 4p^2_{b_1}p^2_{b_2}}\right)$$

Anhang 8 Die Berechnung des Integrals $\int d^4p_3\, G(p_3+q_1-p_2)\, F(p_3)$

$$\int d^4p_3 \; G(p_3+q_1-p_2)\; F(p_3)$$

$$= \int d^4p_3 \; \frac{(p_3+q_1-p_2)\;(p_3+\kappa)(p_3+\mu)^2}{(p_3+q_1-p_2)^2\,(p_3^2-\kappa^2+i\epsilon)(p_3^2-\mu^2+i\epsilon)^2}$$

$$= \int d^4p_3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \; \frac{6xy\;(p_3+q_1-p_2)\;(p_3+\kappa)(p_3+\mu)^2}{\{(p_3+(q_1-p_2)(1-y))^2+(q_1-p_2)^2y(1-y)+y(\kappa^2(-1+\kappa)-\mu^2x)\}^4}$$

$$\begin{aligned}= i\pi^2 \;& O_1 + O_2(q_1-p_2)^1 + O_3(q_1-p_2)^2 + O_4(q_1-p_2)^3 + O_5(q_1-p_2)^4 \\ & + O_6\,(q_1-p_2)^{-2} + O_7(q_1-p_2)^{-1} \\ & + \ln(\mu^2-(q_1-p_2))\;\; O_8(q_1-p_2)^5 + O_9(q_1-p_2)^4 + O_{10}(q_1-p_2)^3 \\ & \qquad + O_{11}(q_1-p_2)^2 + O_{12}(q_1-p_2)^1 + O_{13} \\ & \qquad + O_{14}(q_1-p_2)^{-1} + O_{15}(q_1-p_2)^{-2} \\ & + \ln(\kappa^2-(q_1-p_2))\;\; O_{16}(q_1-p_2)^5 + O_{17}(q_1-p_2)^4 + O_{18}(q_1-p_2)^3 \\ & \qquad + O_{19}(q_1-p_2)^2 + O_{20}(q_1-p_2)^1 + O_{21} \\ & \qquad + O_{22}(q_1-p_2)^{-1} + O_{23}(q_1-p_2)^{-2}\end{aligned}$$

Die Formeln für die einzelnen O_1 bis O_{23} werden auf der folgenden Seite wiedergegeben. In der sich anschließenden Tabelle werden die Werte für die einzelnen Konstanten in Abhängigkeit von μ aufgelistet. Diese Werte sind Grundlage für die Abschätzungen der vollen ersten Näherung.

Die Berechnung des Integrals in diesem Anhang ist nicht besonders langwierig und kann von jedem ohne Schwierigkeiten nachvollzogen werden.

```
K=Nukleonenmasse
M=Geistermasse
Br=1/(K^2-M^2)^2
P1=3/4*LOG(2)+19/48+5/6*M+1/3*K-15/32*K^2+85/96*M^2
P2=1/(K^2-M^2)*(5/24*K^4-K^3/6-5/12*K^2*M-K*M/4-M*M/4-15/8*K^2)
P3=LOG(M^2)*(2.1*K^6-9/4*K^4-K^3/3-K^2/4+K/4-3/5*M^6-4/3*M^3+M/2+K*M)
P4=LOG(M^2)*(9/4*K^2*M^2-4.8*M^2*K^4+9/5*M^4*K^2-2/3*K^2*M-2/3*K*M^2)
P5=LOG(M^2)*Br*(.15*K^10-6*K^8-2/3*K^7+1/4*K^6+3/4*K^5)
P6=LOG(M^2)*Br*(8/3*K^6*M+K^5*M+1.5*K^4*M+.5*K^4*M^2+K*M^2)
P7=LOG(K^2)*Br*(2.85*K^10+6*K^8+2/3*K^7-1/4*K^6+1/4*K^5)
P8=LOG(K^2)*Br*(4/3*M*K^6+M*K^5+.5*M*K^4-.5*M^2*K^4)
O(1)=P1+P2+P3+P4+P5+P6+P7+P8
Q1=1/16-13.65*K^6+12.85*K^4+11/3*K^3+22/3*K^2*M-K^2/6-17/20*K^2*M^2
Q2=-3/20*M^4-5/6*M^2+4/3*M+11/12*K+K*M
Q3=1/(K^2-M^2)*(1/12*K^2+M/3+K/3+5/8)
O(2)=Q1+Q2+Q3
O(3)=-1/40*K^2-M^2/5+1/4-3/20*K^4-K/3-2*M/3-1/(8*(K^2-M^2))
O(4)=-3/20*K^2-1.3
O(5)=3/5
R1=-3/1152*K^4+M^4/128+7/576*K^2*M^2-59/96*(K^6/(K^2-M^2))-K^2/32+M^2/3
R2=LOG(M^2)*(1/96*(K^8/(K^2-M^2)^2)+K^4/48-K^2*M^2/12-K^2/32+M^2/32)
R3=LOG(K^2)*1/96*(K^8/(K^2-M^2)^2)
O(6)=R1+R2+R3
S1=11/6*(K^4/(K^2-M^2))-3/144*K^2-M^2/24+K^2*M^2/72
S2=LOG(M^2)*(5/24*K^4+5/8*M^4-K^3/6-5/6*M^3+K^2/24+M^2/3+M*K/4)
S3=LOG(M^2)*(5/12*K^2*M^2-5/12*M*K^2-K*M^2/3)
S4=LOG(M^2)*Br*(-5/24*K^8+K^7/6-K^6/24+5/12*K^6*M+K^5*M/4)
S5=LOG(M^2)*Br*(-K^4*M^4/4)
S6=LOG(K^2)*Br*(5/24*K^8-K^7/6+K^6/24-5/12*M*K^6+M^2*K^4/4)
S7=LOG(K^2)*Br*(M*K^5/4)
O(7)=S1+S2+S3+S4+S5+S6+S7
O(8)=Br*(-3/5)
O(9)=Br*(3/4*K^2+1)
O(10)=Br*(-K^2+K/3+2*M/3+1/8)
O(11)=Br*(-2*K^3-4*K^2*M+M^2/2+K*M-K/12-M/3-11/96)
T1=Br*(2*K^8-K^6+3*K^5+6*K^4*M-2*K^3-3.75*K^2*M-2*K*M^3-M^4)
T2=Br*(M^2/4+M*K/4+K^2/8)
O(12)=T1+T2
U1=4.35*K^10-K^7/3-2.35*K^6+9/4*K^5+2.0625*K^4+K^3/3-K^2-K/4+3/5*M^6
U2=4/3*M^3-M/2+2/3*K^6*M+5.3*K^4*M^2-2*K^4*M^3+9/2*K^4*M-K^3*M^2-K^3*M/2
U3=-2.75*K^2*M^2-9/5*K^2*M^4+2/3*K^2*M-K*M+K*M^4-1/16
O(13)=(U1+U2+U3)*Br
V1=-5/24*K^4-5/8*M^4+K^3/6+5/6*M^3-5/12*K^2*M^2+5/12*K^2*M+K*M^3/3-M^2/4
V2=-M*K/4+K^2/12-M^2/12
V3=1/(K^2-M^2)^2*(-25/24*K^8-K^7/6-5/12*M*K^6+M^2*K^4/4+M*K^5/4+K^6/8)
V4=1/(K^2-M^2)^2*(-K^4/8+K^2/8)
O(14)=Br*(V1+V2+V3+V4)
W1=K^4/32+M^4/32+2/32*K^2*M^2-K^4/12+M^2*K^2/12
W2=1/(K^2-M^2)^2*(-K^8/32+K^6/12-K^4/16)
O(15)=Br*(W1+W2)
O(16)=Br*(1/5)
O(17)=Br*(1.25*K^2-1)
O(18)=Br*(-5*K^2-2/3*M+K/3-1.125)
O(19)=Br*(4*K^6+K^3+K^2/12+K/12+M/3-M^2/2-M*K+1/96)
X1=Br*(-2*K^8+2*K^6-K^5-4/96*K^2+M^4-M^2/4+2*K^4*M-K^2*M/4-K*M/4+2*K*M^3
O(20)=X1
D1=11/10*K^10-2*K^8+18/12*K^7+K^6/4+K^4/16+2/3*K^6*M-K^5*M^2-K^5*M
D2=-K^4*M^2/2-K^4*M/2-2*K^4*M^3+K^3*M/2+K^2*M^2/2+K^3*M^2-K*M^4
O(21)=Br*(D1+D2)
O(22)=Br*(-5/24*K^8+K^7/6+K^6/24+5/12*K^6*M-M^2/4-M*K/4)
O(23)=Br*K^8/96
```

Tabelle A1 Die Konstanten O_1 bis O_{23} in Abhängigkeit von μ

MUE= .317

```
O( 1 )= 5.60900786051
O( 2 )= 8.52184306522
O( 3 )=-.589252139771
O( 4 )=-1.43001415
O( 5 )= .6
O( 6 )=-.5357388239
O( 7 )= 1.3112266823
O( 8 )=-1.02184573689
O( 9 )= 2.81019626909
O( 10 )=-.374837427052
O( 11 )=-4.53941284927
O( 12 )= 2.55197783752
O( 13 )= 5.96973251342
O( 14 )=-1.66706227677
O( 15 )=-7.44253676443E-02
O( 16 )= .34061524563
O( 17 )= .142123840084
O( 18 )=-9.12815648302
O( 19 )= 5.6749598553
O( 20 )=-.313199779638
O( 21 )= .702487854605
O( 22 )=-3.93013655815E-03
O( 23 )= 1.00129097525E-02
```

MUE= .729

```
O( 1 )=-13.3587399825
O( 2 )= 13.632718924
O( 3 )=-1.15975999468
O( 4 )=-1.43001415
O( 5 )= .6
O( 6 )=-1.21765808969
O( 7 )= 2.68161223472
O( 8 )=-5.33620291084
O( 9 )= 14.6751872321
O( 10 )= .485348406638
O( 11 )=-32.3029820226
O( 12 )= 11.4345369575
O( 13 )= 42.3175136558
O( 14 )=-44.2157037089
O( 15 )=-.488982004994
O( 16 )= 1.77873430361
O( 17 )= .742188005272
O( 18 )=-50.1111401812
O( 19 )= 25.5289930606
O( 20 )= 9.57523751937
O( 21 )=-3.57468329172
O( 22 )=-.83737059498
O( 23 )= 5.22886344173E-02
```

```
O( 1 )=-2.89566971807E+23                    MUE= .931000000001
O( 2 )=-658948374989
O( 3 )= 62499999999
O( 4 )=-1.43001415
O( 5 )= .6
O( 6 )=-4.20347017099E+20
O( 7 )=-1.24145038953E+22
O( 8 )=-1.50000000000E+23
O( 9 )= 4.12517687500E+23
O( 10 )= 4.73097500000E+22
O( 11 )=-1.01102136150E+24
O( 12 )= 1.05123783681E+23
O( 13 )= 1.36872534429E+24
O( 14 )=-3.25095548050E+46
O( 15 )=-6.45497458637E+44
O( 16 )= 5.00000000000E+22
O( 17 )= 2.08628125000E+22
O( 18 )=-1.44228458333E+24
O( 19 )= 6.45519652460E+23
O( 20 )= 6.13887592223E+23
O( 21 )=-3.65339121357E+23
O( 22 )=-4.25479393800E+22
O( 23 )= 1.46982700876E+21
```

```
O( 1 )= 5.94184370362                        MUE= 1.113
O( 2 )= 8.2094437637
O( 3 )=-.84843307374
O( 4 )=-1.43001415
O( 5 )= .6
O( 6 )= 1.10019747053
O( 7 )=-3.63387185286
O( 8 )=-4.33557488135
O( 9 )= 11.9233421602
O( 10 )= 2.24418267873
O( 11 )=-31.6519231008
O( 12 )=-7.6831582418
O( 13 )= 46.2109326842
O( 14 )=-24.7853106729
O( 15 )= .655972733829
O( 16 )= 1.44519162712
O( 17 )= .603015238862
O( 18 )=-42.5643016622
O( 19 )= 16.5279288156
O( 20 )= 31.8099052254
O( 21 )=-21.9053348921
O( 22 )=-1.85109858855
O( 23 )= 4.24836337275E-02
```

```
O( 1 )= 4.04760183668                    MUE= 1.399
O( 2 )= 11.5566036315
O( 3 )=-1.40416779431
O( 4 )=-1.43001415
O( 5 )= .6
O( 6 )= .390747199976
O( 7 )=-.952076493504
O( 8 )=-.504600529822
O( 9 )= 1.38771095782
O( 10 )= .421542441612
O( 11 )=-4.07190260138
O( 12 )=-4.44448225555
O( 13 )= 7.88722185433
O( 14 )=-.584685757995
O( 15 )= .268521525427
O( 16 )= .168200176607
O( 17 )= 7.01825749405E-02
O( 18 )=-5.1142427082
O( 19 )= 1.4777652145
O( 20 )= 7.86419463696
O( 21 )=-6.02228337759
O( 22 )=-.357214725731
O( 23 )= 4.94450324913E-03
```

```
O( 1 )=-28.0091655562                    MUE= 1.943
O( 2 )= 12.6109879323
O( 3 )=-2.20209902921
O( 4 )=-1.43001415
O( 5 )= .6
O( 6 )= .157752336794
O( 7 )= 4.48144983526
O( 8 )=-.070927834041
O( 9 )= .195059907187
O( 10 )= .102124929587
O( 11 )=-.649421313676
O( 12 )=-2.71907578241
O( 13 )= 3.86073393415
O( 14 )=-.336822161963
O( 15 )= .10429257765
O( 16 )= .023642611347
O( 17 )= 9.86502735086E-03
O( 18 )=-.761741886054
O( 19 )= .061824949103
O( 20 )= 3.36330341511
O( 21 )=-2.7898099091
O( 22 )=-.101459634429
O( 23 )= 6.95010974311E-04
```

Anhang 9 Die funktionale Integration

Die Form der in dieser Arbeit benutzten funktionalen Integration geht auf Dammeier zurück. Es gibt keinen fundierten Beweis für sie aufgrund der Form der Kanalgleichungen als Potenzfunktionale, die angenähert werden. Man kann jedoch die Terme der ersten und zweiten Näherung aus Kapitel 7 genauer untersuchen und mit ihrer Hilfe und unter Beachtung der Vertauschungsrelationen der Quellen die Funktionsweise der funktionalen Integration erkennen. In diesem Falle ergeben sich folgende Integrale:

$$\int \delta j_\alpha \; j_\delta |\phi_o\rangle = \{0.5 \; j_\alpha^2 \; \delta_{\alpha\delta} - j_\delta \; j_\alpha\} |\phi_o\rangle$$

$$\int \delta j_\alpha \; j_\delta \; j_\gamma |\phi_o\rangle = \{-[\; 0.5 \; j_\alpha^2 \delta_{\alpha\delta} \; j_\gamma \; + \; 0.5 \; j_\delta \; j_\alpha^2 \; \delta_{\alpha\gamma}] - j_\delta \; j_\gamma \; j_\alpha\} |\phi_o\rangle$$

$$\int \delta j_\alpha \; \partial_\beta \; |\phi_o\rangle = \delta_{\alpha\beta} \; |\phi_o\rangle \qquad \text{(A9.,1)}$$

$$\int \delta j_\alpha \; \partial_\beta \; \partial_\gamma |\phi_o\rangle = 0.5 \; [\delta_{\alpha\beta} \; \partial_\gamma \; - \; \partial_\beta \; \delta_{\alpha\gamma}] \; |\phi_o\rangle$$

$$\int \delta j_\alpha \; \partial_\beta \; j_\gamma |\phi_o\rangle = 0.5 \{\delta_{\alpha\beta} \; j_\gamma \; - \; \partial_\beta \; (0.5 \; j_\alpha^2 \; \delta_{\alpha\gamma} - \; j_\gamma \; j_\alpha \;)\;]\; |\phi_o\rangle$$

Aus diesen Integralen lassen sich ohne weiteres kompliziertere Integralausdrücke berechnen. Für die in dieser Arbeit maßgeblichen erste und zweite Näherung der Kanalgleichungen konnte die bisher gewählte Integralform bestätigt werden. Sie stellt keinen Beweis für die Richtigkeit der Funktionalintegration dar, da sie sich nur auf die ersten Näherungen bezieht. Allerdings erscheint sie als besonders plausibel.

Literaturverzeichnis

B1.- H.P.Dürr — Texas Univ.Austin 1973

Gauge Symmetries in Nonlinear Spinor Theories

B2.-H.P.Dürr — Texas Univ.Austin 1973

Problem of Unitarization in Field Theories with Indefenite Metric

B3.- P.Puig Adam — Madrid 1972

Calculo Integral

B4.- I.S.Gradshteyn;I.M.Ryzhik — New York 1965

Table of Integrals, Series and Products

B5.- M.Abramowitz;J.A.Stegun — Washington 1965

Handbook of Mathematical Functions

B6.- G.Arfken — New York 1968

Mathematical Methods for Physicists

B7.- E.El Baz;B.Cartel — New York 1972

Graphical Methods of Spin Algebras

B8.- Yutsis;Levinson;Vanagas — Jerusalem 1962

The Theory of Angular Momentum

B9.- R.P.Feynman — New York 1962

Quantum Elektrodynamics

B10.- R.P.Feynman — New York 1962

Theory of Fundamental Processes

B11.- R.P.Feynman — Massachusetts 1972

Photon-Hadron Interaction

B12.- R.Omnes;M.Froissart — New York 1963

Mandelstam Theory and Regge Poles

B13.- L.Lewin — London 1958

Dilogarithms and Associated Functions

B14.- E.W.Schmid;H.Ziegelman — Braunschweig 1974

The Quantum Mechanical Three Body Problem

B15.- S.S.Schweber Evanston, Illinois 1961
An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory

B16.- Landau;Liftschitz Berlin 1963
Feldtheorie

B17.- Roman New York 1969
Introduction to Quntum Field Theorie

B18.- Källen Mannheim 1964
Elementarteilchenphysik

B19.- Bjorken;Drell Mannheim 1965
Relativistische Quantenfeldtheorie

B20.- Heisenberg Stuttgart 1967
Einführung in die einheitliche Theorie der Elementarteilchen

B21.- Omnes London 1970
Introduction to Particle Physics

B22.- Close London 1979
An Introduction to Quarks and Partons

B23.- Lurie New York 1968
Particles and Fields

B24.- Gasiorowicz Mannheim 1966
Elementarteilchenphysik

B25.- Courant;Hilbert Berlin 1968
Methoden der Mathematischen Physik

B26.- Gröbner;Hofreiter New York 1966
Integraltafeln

B27.- Wesson Dordrecht/Niederlande
Gravity,Particles and Astrophysics

B28.- Tassie Longman/Great Brittain
The Physics of Elementary Particles

B29.- Williams Oxford/Great Brittain

An Introduction to Elementary Particles

B30.- Nishijima New York/U.S.A. 1969

Fields and Particles

B31.- Rzewuski London 1958

Field Theory

B32.- Schutz London

Quantum Field Theory and the Many Body Problem

B33.- Fick Frankfurt a.M. 1968

Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie

B34.- Schwinger Massachusetts 1973

Particles, Sources and Fields

B35.- Schwinger New York 1970

Quantum Kinematics and Dynamics

B36.- Dyson New York 1966

Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics

B37.- Frautchi New York 1963

Regge Poles and S-Matrix Theory

B38.- Novozhilov;Tulub New York 1951

The Method of Functionals in the Quantum Theory of Fields

B39.- Squires New.York 1964

Complex Angular Momenta and Particle Physics

B40.- Barut New York 1967

The Theory of the Scattering Matrix

B41.- Rollnik New York 1967

Teilchenphysik

B42.- Nakanishi New York 1971

Graph Theory and Feynman Integrals

B43.- Biedenharn;van Damm New York 1965
Quantum Theory of Anguiar Momentum

B44.- v.d.Waerden Berlin 1967
Algebra

B45.- Marschak;Sudarshan New York
Einführung in die Physik der Elementarteilchen

B46.- W.Pauli New York 1955
Niels Bohr and the Developement of Physics

B47.- Henley;Thirring Zürich 1975
Elementare Quantenfeldtheorie

B48.- Gürsey Les Houches 1963
Relativity, Groups and Topology

D1.-	Herzog	Diplomarbeit	Tübingen	1979
D2.-	Pouradjam	Doktorarbeit	Tübingen	1980
D3.-	Haegele	Doktorarbeit	Tübingen	1979
D4.-	Englert	Doktorarbeit	Tübingen	1978
D5.-	Phillip	Doktorarbeit	Tübingen	1975
D6.-	Engeser	Doktorarbeit	Tübingen	1974
D7.-	Scheerer	Doktorarbeit	Tübingen	1972
D8.-	Bauhoff	Doktorarbeit	Tübingen	1974

Literaturverzeichnis (Artikel)

1.- H.Stumpf;H.Yamamoto Z.f.Naturf. 20a,1-12,1965

Zur Berechnung von Massenwerten skalarer Mesonen in der nichtlinearen Spinortheorie.

2.- H.Stumpf Ann.d.Physik 7Folge Band 11,63

Quantenmechanische Modellbetrachtungen zur Mehrkanalstreuung in nichtlinearen Feldtheorien

3.- H.Stumpf,F.Wagner,F.Wahl Z.f.Naturf. 19a,1254-1267,1964

Zur Konvergenz der einzeitigen Tamm-Dancoff Methode beim anhormonischen Oszillator

4.- H.Rampacher,H.Stumpf,F.Wagner Fort.d.Physik 13,385-480,1965

Grundl. der Dynamik in der nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen

5.- D.Maison,H.Stumpf Z.f.Naturf. 21a,1829-1841,1966

On the Field Theoretic Functional Calculus for the Anharmonic Oscillator 1

6.- W.Schuler,H.Stumpf Z.f.Naturf. 22a,1842-1865,1967

On the Field Theoretic Functional Calculus for the Anharmonic Oscillator 2

7.- W.Schuler,H.Stumpf Z.f.Naturf. 23a,902-917,1968

On the Field Theoretic Functional Calculus for the Anharmonic Oscillator 3

8.- H.Stumpf z.f.Naturf. 24a,188-197,1969

On the Quantum Theory of the Anharmonic Oscillator in Functional Space

9.- W.Schuler Z.f.Naturf. 23a,1869-1887,1968

Field Theoretic Functional Calculus for the Anharmonic Oscillator in low Approximations

10.- H.Stumpf Ann.d.Physik 7 Folge Bd.13,64

Zur quantenfeldtheoretischen Darstellung der Streumatrix im Halbleitermodell

11.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 24a,1022-1029,1969

Functional Quantum Theory of Scattering Processes

12.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 25a,575-586,1970

Functional Quantum Theory of Free Relativistic Fermi Fields

13.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 25a,796-803,1970

Functional Quantum Theory of Scattering Processes 2

14.- H.Stumpf,K.Scheerer,H.G.Märtl , Z.f.Naturf. 25a,1556-1561,1970

Symmetry Conditions on Nonlinear Spinor Field Functionals

15.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 26a,623-630,1971

On the Calculation of Nonlinear Spinor Field Functionals

16.- H.Stumpf,W.Engeser,K.Illig Z.f.Naturf. 26a,1723-1729,1971

Functional Quantum Theory of Scattering Processes 3

17.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 26a,1730-1739,1971

Functional Quantum Theory of Scattering Processes 4

18.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 27a,1058-1072,1972

On the Functional Definition and Calculation of Global Observables in Nonlinear Spinor Field Quantum Theory

19.- H.Stumpf Acta Univ.Wratislaviensis Nr.207

On the Functional Quantum Theory of Nonlinear Spinor Fields

20.- H.Stumpf Acta Phys.Austriaca,Suppl.9,72

Functional Relativistic Cluster Theory

21.- D.Englert,H.Stumpf Z.f.Naturf. 29a,376-384,1974

On the Normalization of Meson Eigenstates in Functional Quantum Theory of the Nonlinear Spinor Field

22.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 29a,519-555,1974

On the Calculation of Nonlinear Spinor Field Functionals 2

23.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 31a,528-539,1976

On the Calculation of Nonlinear Spinor Field Functionals 3

24.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 30a,708-720,1975

Scalarproducts of Spinor Field Functionals and State Representations in Nonlinear Spinor Field Quantum Theory

25.- H.Stumpf;K.Scheerer Z.f.Naturf. 30a,1361-1371,1975

On the Construction of Relativistic Representation Spaces in Functional Quantum Theory of the Nonlinear Spinor Field

26.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 31a,528-539,1976

On the Calculation of Nonlinear Spinor Field Functionals 3

27.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 34a,284-291,1979

Unitarization in Nonlinear Spinor Field Quantum Theory

28.- H.Stumpf Sum.School 1977 Tübingen Ch.7

New Representation Spaces of the Poincare Group and Functional Quantum Theory

29.- H.Stumpf Z.f.Naturf. 35a,1104-1107,1980

Functional Quantum Theory of the Nonlinear Spinor Field as a Lepton-Hadron Model with Quark-Confinement

30.- H.Stumpf (in publication)

Dipole Ghosts as Quarks in Funktional Quantum Theory of the Nonlinear Spinor Field

31.- H.Stumpf (in publication)

Functional Quantum Theory of the Nonlinear Spinorfield as a Lepton-Hadron Model with Quark-Confinement 2

32.- U.Ramacher Z.f.Naturf. 35a,964-972,1980

Fadeev Equations in the Functional Quantum Theory of the Nonlinear Spinorfield

33.- W.Bauhoff Z.f.Naturf. 26a,1553-1559,1971

Functional Quantum Theory of Free Relativistic Scalar Fields

34.- W.Bauhoff;K.Scheerer Z.f.Naturf. 27a,1539-1553,1972

On the Calculation of Vector Mesons in Functional Nonlinear Spinor Theory

35.- W.Bauhoff Z.f.Naturf. 29a,916-923,1974

Fredholm Approximations in the Scalar Bethe-Salpeter Equation

36.- W.Bauhoff Z.f.Naturf. 29a,1394-1406,1974

On the Calculation of Scalar Mesons in Functional Nonlinear Spinor Theory

37.- W.Bauhoff Z.f.Naturf. 30a,395-401,1975

Angular Momentum and Discrete Symmetries in the Spinor Bethe-Salpeter Equation

38.- W.Bauhoff Z.f.Naturf. 30a,656-671,1975

Numerical Solution of the Spinor-Spinor Bethe-Salpeter Equation in Functional Nonlinear Spinor Theory

39.- W.Bauhoff;D.Englert Z.f.Naturf. 30a,1215-1223,1975

Mass Renormalization and Chiral Symmetry Breaking in Nonlinear Spinor Theory

40.- D.Englert Rep.Math.Phys. 3,Vol.5,1974

On the Orthonormalization of Generalized Free Fermi-Field-Functionals

41.- W.Bauhoff Phys.Letters Vol.62b,2,1976

Electromagnetic Mass Differences in a Relativistic Quark Model

42.- W.Bauhoff Z.f.Naturf. 31a,690-692,1976

Angular Momentum and Discrete Symmetries in the Spinor Bethe-Salpeter Equation 2

43.- K.Dammeier Z.f.Naturf. 27a,1042-1058,1972

Calculation of Eigenvalues in Functional Nonlinear Theory

44.- K.Dammeier Z.f.Naturf. 29a,981-990,1974

Nucleon-Nucleon Scattering Calculations in a Pole Regularized Spinor Theory

45.- K.Dammeier Z.f.Naturf. 29a,991-1002,1974

Eigenvalue Equations with Dressed Propagators in a Pole Regularized Spinor Theory

46.- K.Illig Z.f.Naturf. 29a,1-16,1974

Lowest Approximation of Relativistic Nucleon-Nucleon Scattering in Functional Quantum Theory

47.- H.Sohr Z.f.Naturf. 25a,804-815,1970

Über die Existenz der Schwingerschen Funktionale in der Quantenmechanik

48.- A.Rieckers Z.f.Naturf. 26a,631-642,1971

Representation Symmetries and Observables in Functional Hilbert Space 1

49.- A.Rieckers Z.f.Naturf. 27a,7-22,1972

Representation of Symmetries and Observables in Functional Hilbert Space 2

50.- A.Rieckers Z.f.Naturf. 33a,1406-1421,1978

Composite System Approach to Thermodynamik Stability

51.- E.zur Linden;H.Mitter Il Nuov.Cim.,Vol.61,2,384,1969

Bound State Solutions of the Bethe-Salpeter Equation in Momentum Space

52.- E. zur Linden Phys.Rev.D,Vol.3,6,1335,1971

Solution of a Relativistic Bethe-Salpeter Equation in the Whole s-Plane

53.- H.Mitter Z.f.Naturf. 20a,1505-1518,1965

Zur Theorie nichtlinearer Spinorfelder

54.- F.Wahl Z.f.Naturf. 30a,1333-1346,1975

Many-Body-Systems and Exciton Model in New-Tamm-Dancoff Formulation

55.- R.Weber Z.f.Naturf. 26a,220-223,1971

Orthogonalitätsrelationen der mehrzeitigen erzeugenden Funktionale des harmonischen Oszillators

56.- W.Güttinger;E.Pfaffelhuber J.Appl.Math.,Vol.15,4,1030,1967

Unrenormalizable Field Theories in Term of Lorentz-Invariant Generalized Functions

57.- E.Pfaffelgruber;R.Blomer Ann.Phys. 45,405-415,1967

Singular Scattering Equations in Momentum Space

58.- Arif-Uz-Zaman, Z.f.Naturf. 16a,225-227,1961

Zur Berechnung der Masse des Fermions in einer nichtlinearen Spinortheorie

59.- W.Heisenberg;M.Born — Ann.d.Phys,74,1,1924
Zur Quantentheorie der Molekeln

60.- H.A.Kramers;W.Heisenberg — Z.f.Physik 31,681,1925
Über die Streuung von Strahlung durch Atome

61.- W.Heisenberg — Z.f.Physik 33,879,1925
Über quantentheoretische Umdeutungen kinematischer und mechanischer Beziehungen

62.- M.Born;W.Heisenberg;P.Jordan — Z.f.Physik 35,557,1926
Zur Quantenmechanik

63.- W.Heisenberg;W.Pauli — Z.f.Physik 56,1,1929
Zur Quantenmechanik der Wellenfelder 1

64.- W.Heisenberg;W.Pauli — Z.f.Physik 59,168,1930
Zur Quantentheorie der Wellenfelder 2

65.- W.Heisenberg — Z.f.Physik 65,4,1930
Self Energy of the Elektron

66.- W.Heisenberg;H.Euler — Z.f.Physik 98,714,1936
Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons

67.- W.Heisenberg — Ann.d.Physik 32,20,1938
Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretenden Länge

68.- W.Heisenberg — Z.f.Physik 120,513,1943
Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen 1

69.- W.Heisenberg — Z.f.Physik 120,673,1943
Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen 2

70.- W.Heisenberg — Z.f.Physik 126,519,1949
Über die Entstehung von Mesonen in Vielfachprozessen 1

71.- W.Heisenberg — Z.f.Physik 126,569,1949
Über die Entstehung von Mesonen in Vielfachprozessen 2

72.- W.Heisenberg — Z.f.Natf.,5a,251,1950
Zur Quantentheorie der Elementarteilchen

73.- W.Heisenberg Z.f.Naturf., 5a, 367, 1950

Stationäre Zustände in der relativistischen Quantentheorie der Wellenfelder

74.- W.Heisenberg Z.f.Naturf., 6a, 281, 1951

Zur Frage der Kausalität in der Quantentheorie der Elementarteilchen

75.- W.Heisenberg Z.f.Physik 133, 65, 1952

Mesonenerzeugung als Stoßwellenproblem

76.- W.Heisenberg Gött.Akad.d.Wiss., 2a, 111, 1953

Zur Quantisierung nichtlinearer Gleichungen 1

77.- W.Heisenberg Z.f.Naturf., 9a, 292, 1954

Zur Quantentheorie nichtrenormierbarer Wellengleichungen 2

78.- W.Heisenberg;F.Kortel;H.Mitter Z.f.Naturf., 10a, 425, 1955

Zur Quantentheorie nichtlinearer Wellengleichungen 3

79.- W.Heisenberg Z.f.Physik 144, 1, 1956

Erweiterung des Hilbertraums in der Quantentheorie der Wellenfelder

80.- W.Heisenberg;P.Ascoli Z.f.Naturf., 12a, 177, 1957

Zur Quantentheorie nichtlinearer Wellengleichungen

81.- W.Heisenberg Nucl.Phys., 4, 532, 1957

Lee Model and Quantization of nonlinear Field Equations

82.- W.Heisenberg Nucl.Phys., 5, 195, 1958

Application of the Tamm-Dancoff-Method to the Lee-Model

83.- W.Heisenberg;W.Pauli 1958

On the Isospin Group in the Theory of Elementary Particles

84.- H.P.Dürr;W.Heisenberg;H.Mitter S.Schlieder;K.Yamazaki Z.f.Naturf., 14a, 441, 1959

Zur Theorie der Elementarteilchen

85.- H.P.Dürr;W.Heisenberg Z.f.Naturf., 16a, 726, 1961

Zur Theorie der „seltsamen" Teilchen

86.- W.Heisenberg Naturw., 50, 3, 1963

Die Entwicklung der einheitlichen Felttheorie der Elementarteilchen

87.- H.P.Dürr;W.Heisenberg Nuov.Cim., 37, 1446, 1965

On the Spurion Theory of Strange Particles

88.- H.P.Dürr;W.Heisenberg Nuov.Cim., 37, 1487, 1965

Strange Particles Coupling Constant

89.- H.P.Dürr;W.Heisenberg Nuov.Cim., 38, 1220, 1965
H.Yamamoto;K.Yamazaki

Quantum Electrodynamics in the Nonlinear Spinor Theory and the Value of Sommerfeld's Fine Structure Constant

90.- H.P.Dürr Z.f.Naturf., 16a, 327, 1961

Isospin und Parität in der nichtlinearen Spinortheorie

91.- H.Saller;H.P.Dürr Z.f.Naturf., 22a, 1819, 1967

Calculation of Boson Masses in Higher New Tamm-Dancoff Approximation in the Nonlinear Spinor Theory

92.- H.P.Dürr;F.Wagner Nuov.Cim., Vol.54, 3, 1968

The Mass Eigenvalue Problem for Baryons in the Nonlinear Spinor Theory

93.- H.P.Dürr;F.Wagner Nuov.Cim., Vol.53A, 1, 1968

Graphical Methods for the Execution of the γ- or σ- Algebra in Spinor Theories

94.- H.P.Dürr;E.Seiler Nuov.Cim., Vol.66A, 734, 1970

Analicity and Dipol Regularization

95.- H.Saller;H.P.Dürr Nuov.Cim., 64A, 145, 1969

SU_3-invariant Spinor Theory without Quarks

96.- H.P.Dürr;N.J.Winter Nuov.Cim., 70A, 467, 1970

Gauge-Invariant Spinor Theoties

97.- W.Heisenberg Publ.Theor.Phys., 34, 1972

Comments on New Tamm-Dancoff Method

98.- W.Heisenberg Naturw., 61, 1, 1974

The United Field Theory of Elementary Particles, some Recent Advances

99.- H.P.Dürr — Proc.Conf.Phys., 14th, Univ.Brussels, 1967

Goldstone Theorem and possible Applications to Elementary Particle Physics

100.- H.P.Dürr;E.Rudolpf — Nuov.Cim., 62A, 411, 1969

Good and Bad Ghosts in Quantum Electrodynamics

101.- H.P.Dürr;H.Mitter — Nuov.Cim., 64A, 715, 1969

Construction of Canonical Operators in Noncanonical Field Theories

102.- G.Boerner;H.P.Dürr — Nuov.Cim., 64A, 669, 1969

Classical and Quantum Fields in de Sitter Space

103.- H.P.Dürr;E.Rudolpf — Nuov.Cim., 65A, 426, 1970

Indefinite Metric in Massless Quantum Field Theories of Arbitrary Spin

104.- G.Börner;H.P.Dürr — Nuov.Cim., 66A, 185, 1970

Nonlinear Spinor Theory in de Sitter Space

105.- H.P.Dürr;N.Winter — Nuov.Cim., 7A, Nr.2, 461, 1972

Construction of Currents in a Gauge Invariant Spinor Theory

106.- H.P.Dürr — Coral Gables 1972

Gauge Invariant Spinor Theories and the Gravitational Field

107.- H.P.Dürr;K.Baumann — Nuov.Cim., 12A, Nr.4, 969, 1972

Piecewise Analicity of the S-Matrix Elements and non-local Interactions

108.- H.P.Dürr — Gen.Rel.Grav., 4, Nr.1, 29, 1973

Poincare Gauge Invariant Spinor Theory and the Gravitational Field 2

109.- H.P.Dürr — Z.f.Naturf., 28A, 346, 1973

Role of an indefinite Metric in the State Space of Quantum Field Theory

110.- H.P.Dürr — Nuov.Cim., 16A, Nr.3, 411, 1973

Double Wilson Expansions of Products of three-Spinor-Operators

111.- I.I.Y.Bigi;H.P.Dürr Phys.Lett.,vol.45B,384,1973

Light Cone Algebra of a Self-Interacting Quark Field

112.- I.I.Y.Bigi;H.P.Dürr;N.J.Winter Nuov.Cim.,Vol.22A,420,,1974

Lagrange Theory for Spinor Fields of Subcanonical Dimension

113.- H.P.Dürr Nuov.Cim.,22A,386,1974

Conservation Laws in Lagrange Field Theories with Higher-Order Derivatives

114.- H.P.Dürr;P.D.T.van der Merve Nuov.Cim.,23A,1,1974

Conformal Invariant Spinor Theory with Third-Order Derivatives

115.- C.C.Chiang;H.P.Dürr Verh.Deut.Phys.Ges.,10,222,197

Feldtheorien mit höheren Ableitungen und Konforminvarianz

116.- H.P.Dürr Nuov.Cim.,27A,305,1975

On a Gauge and Conformal Invariant Nonlinear Spinor Theory

117.- U.Wolff;H.P.Dürr Nuov.Cim.,32A,51,1976

Remark on Conservation Laws in Free-Field Theories

118.- H.P.Dürr Proc.Warshaw,25,1974

Recent Developements in Nonlinear Spinor Theories

119.- H.Schneider;H.P.Dürr Nuov.Cim.,37A,213,1977

On Double Wilson Expansions of Products of Three-Spinor Operators 2

120.- R.Gräber;H.P.Dürr Nuov.Cim.,40A,11,1977

Singular Potentials and the Divergence Problem in Quantum Field Theory

121.- H.P.Dürr;H.Saller Nuov.Cim.,41A,677,1977

Quarks and Flavours a Dissident Interpretation of Higher Symmetries

122.- H.P.Dürr;H.Saller Phys.Lett.,34B,336,1979

Is Hypercharge U(1) in Weinbergs's Model Redundant?

123.- E.Rudolpf;H.P.Dürr Nuov.Cim.,10A,547,1972

Gupta-Bleuler Formalism with Scalar Fermions in Massless Yang-Mill's Theory

124.- W.Heisenberg;K.Yamazaki Nuov.Cim., 11B, 125, 1972

Magnons in a Model with Antiferromagnetic Properties 2

125.- H.P.Dürr Naturw., 60, 274, 1973

The Interactions of Elementary Particles

126.- W.Heisenberg Naturw., 61, 1, 1974

The Unified Field Theory of Elementary Particles: some Recent Advances

127.- H.P.Dürr Phys.Rev.Lett., 34, 422, 1975

Is the ψ (3100) a Omega-Omega Compound?

128.- H.P.Dürr Phys.Rev.Lett., 34, 616, 1975

Are there narrow D-wave Baryon-Antibaryon Resonances

129.- W.Heisenberg Phys.Today, 29, 32, 1976

The Nature of Elementary Particles

130.- H.P.Dürr;H.Saller Nuov.Cim., 48A, 505, 1978

Too many Flavours. Dynamical Generation of Effective Degrees of Freedom.

131.- H.P.Dürr;H.Saller Nuov.Cim., 48A, 561, 1978

Gauge-Invariant Rearrangement and Theory of the Cabibbo Angle

132.- H.Saller Nuov.Cim., 1A, 97, 1971

Spinor Potentials with Logarithmic Regularization

133.- H.Saller Nucl.Phys., 40B, 65, 1972

Analytic Vertex Expansions in Quantum Elektrodynamics

134.- H.Saller Nuov.Cim., 7A, 779, 1972

Gauge Invariance and Mass Scale

135.- H.Saller Nuov.Cim., 21A, 661, 1974

Anomalous Green's Functions in a theory of selfinteracting Weyl Spinors

136.- H.Saller Nuov.Cim., 24A, 391, 1974

Gauge Fields as Bound States of subcanonical Fermion Fields

137.- H.Saller — Deut.Phys.Ges., 10, 223, 1975

Spontane Symmetriebrechung und neue Freiheitsgrade

138.- H.Saller — Nuov.Cim., 4A, 421, 1971

Gauge Invariance and Massless Gauge Particles in Spinor Theory

139.- H.Saller — Nuov.Cim., 12A, 349, 1972

A Compact Version of Weinberg's Lepton Model

140.- H.Saller — Nuov.Cim., 34A, 99, 1976

Spontanous Break-Down of Dilation Invariance and New Fermion Degrees of Freedom

141.- H.P.Dürr;H.Saller — Nuov.Cim., 39A, 31, 1977

Appropiate Linearization of Interacting T&heories with Spontaneous Symmetry Breaking

142.- H.Saller — Nuov.Cim., 42A, 169, 1977

Quantized Metrik on Locally Flat Space-Time and Spontaneous Dilatation Asymmetry

143.- H.P.Dürr;H.Saller — Nuov.Cim., 53A, 469, 1979

Unification of Isospin Hypercharge in One Basic SU(2)

144.- F.W.Hehl;R.K.Datta — J.Math.Phys., 12, 1334, 1971

Nonlinear Spinor Equation and Symmetry Connection in General Relativity

145.- F.W.Hehl — Phys.Lett., 36A, 225, 1971

How does one measure torsion of space-time?

146.- F.W.Hehl — Gen.Rel.Grav., 4, 333, 1973

Spin and Torsion in General Relativity 1

147.- F.W.Hehl — Ann.Inst.Henri Poincare 19, 179, 1973

Spin and the Structure of Space-Time

148.- F.W.Hehl — Phys.Rev., 10, 1066, 1974

General Relativity with Spin and Torsion and its Deviations from Einstein's Theory

149.- F.W.Hehl — Gen.Rel.Grav., 5, 491, 1974

Spin and Torsion and General Relativity 2

150.- F.W.Hehl — Gen.Rel.Grav., 6, 123, 1975

On the Relevance of General Relativity with Torsion at Highest Matter Densities and in Microphysics

151.- F.W.Hehl;G.D.Kerlick;P.Heyde — Z.f.Naturf., 31A, 111, 1976

On Hypermomentum in General Relativity 1

152.- F.W.Hehl — Rep.Math.Phys., 9, 55, 1976

On the Energy Tensor of Sinmixing Massive Matter in Classical Field Theory and General Relativity

153.- F.W.Hehl;G.Kerlick;P.Heyde — Z.f.Naturf., 31A, 524, 1976

On Hypermomentum in General Relativity 2

154.- Hehl;Heyde;Kerlick;Nester — Rev.Mod.Phys., 48, 393, 1976

General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects

155.- Hehl;Kerlick;Heyde — Z.f.Naturf., 31A, 823, 1976

On Hypermomentum in General Relativity 3

156.- Hehl;Kerlick;Heyde — Phys.Lett., 63B, 446, 1972

On a New Metric Affine Theory of Gravitation

157.- Hehl;Kerlick;Lord;Smalley — Phys.Lett., 70B, 70, 1977

Hypermomentum and the Microscopic Violation of the Riemannian Constraint in General Relativity

158.- Hehl;Lord;Ne'eman — Phys.Lett., 71B, 432, 1977

Hadron Dilatation, Shear and Spin as Components of the Intrinsic Hypermomentum Current and Metric-Affine Theory of Gravitation

159.- Hehl;Lord;Ne'eman — Phys.Rev., 17, 428, 1978

Hypermomentum in Hadron Dynamics and in Gravitation

160.- Hehl;Nitsch;Heyde;Ne'eman — Phys.Lett., 78B, 102, 1978

Short-Range Confining Component in a Quadratic Poincare Gauge Theory of Gravitation

161.- Hehl;Kerlick — Gen.Rel.Grav., 9, 691, 1978

Metric-Affine Variational Principles in General Relativity 1

162.- Nitsch;Hehl Phys.Lett.,90B,98,1980

Translational Gauge Theory of Gravity: Post Newtonian Approximation and Spin Precession

163.- Yamazaki Nuov.Cim.,43A,154,1965

Normalization of Bethe-Salpeter Amplitude and Coupling Constant

164.- H.P.Dürr;F.Wagner Nuov.Cim.,46A,223,1966

Nonlinear Theory with Hermitean Spinor Field Operators

165.- Volterra Sitzber.Berlin.Math.Gesell. 13,6,1914

166.- N.Wiener Proc.Nat.Akad.Sci. 7,294,1921

167.- V.A.Fock Phys.Z.UdSSR 6,245,1934

168.- R.P.Feynmann Rev.Mod.Phys. 20,367,1948

169.- J.Schwinger Proc.Nat.Akad.Sci. 37,452,1951

170.- K.Wildermuth Z.f.Naturf. 5A,373,1950

Eine Differentialgleichungstheorie der Elementarteilchen

171., M.Herzog (in Vorbereitung)

Vergleich zwischen dem Lepton-Quark - und dem Hadron-Geist-Modell in der Quantenfeldtheorie des nichtlinearen Spinorfeldes.

172., Karowski Preprint Dezember 1972

Über Unitarisierung im Lee-Modell mit Dipolgeist

173.- Karowski Nuovo Cim., 23 A,126,1974

174.- L.D. Faddeev JETP 39,1459,1960
JETP 12,1014,1961
Dokl.,138,565,1961
Dokl.,145,301,1962
Dokl.,6,384,1961
Dokl.,7,600,1963

175.- L.D. Faddeev Jerusalem 1965

Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in the Quantum Scattering Theory

176.- W.Glöckle;W.D.Heis Nucl.Physics 122,343,1968
Nucl.Physics 123,305,1969

177.- W.Glöckle Nucl. Physics A141, 620, 1970

178.- C.J.Isham, A.Salam, J.Strathedee Phys.Rev. D3, 867, 1971

179.- Y.Nambu, G.Jona-Lasinio Phys.Rev.122, 345, 1961

Lebenslauf

Am 7. Juni 1955 wurde ich, Michael Herzog, als Sohn von Prof. Dr. Dr. Herbert Herzog, Nationalökonom und Jurist, und seiner Ehefrau Dr. Ingeborg Herzog, Chemikerin, in Madrid (Spanien) geboren. Ich trat am 9. Oktober 1961 in die erste Grundschulklasse der Deutschen Schule Madrid ein und besuchte diese Schule dreizehn volle Zeitschuljahre in aufsteigenden Klassen. Am 18. Juni 1974 erhielt ich das Zeugnis der allgemeinen Hochschulreife.

An der Universität Würzburg immatrikulierte ich mich am 4. November 1974 für den Studiengang Physik. Nach dem Vordiplom im vierten Semester wechselte ich zur Universität Tübingen im Oktober 1976. Meine Diplomarbeit „Nukleon-Nukleon-Streuung im Rahmen der Quantenfeldtheorie des nichtlinearen Spinorfeldes" fertigte ich unter Anleitung von Prof. Dr. Harald Stumpf am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen an. Im neunten Semester, am 30. März 1979 wurde mir das Diplom in Physik verliehen.

Von Juli 1979 bis März 1983 erfolgte unter der Leitung von Prof. Dr. H. Stumpf die Anfertigung dieser Dissertation.

Akademische Lehrer

Expemimentalphysik: Scheer, Gensch, Przybylski, Hink, Hörber, Steinbrunner, Landwehr, Hübener, Baumann, Krüger, Nakel, Mack, Mertens

Angewandte Physik: Möllenstedt, Speidel, Schwarzer, Gaukler, Jönsson, Schief

Theoretische Physik: Ebert, Fraas, Steinwedel, Reents, Böhm, Wittern, Sünkel, Ziegelmann, Wildermuth, Pfister, Großer, Kramer, Stumpf, Rieckers, Becker, Lenz, Dittrich, Schmid, John, Wahl

Astrophysik: Elwert, Haug, Elzner, Stix

Astronomie: Mauder, Grewing, Staubert, Krämer, Temesvary

Informatik: Güttinger, Dal Cin, Balzert, Bender, Kurzweil, Motsch, Weber

E.D.V.: Hewers, Bruscha, Schubring, Graef, Hansen, Kellermann, Nötzold, Barg

Mathematik: Knobloch, Müller, Tamaschke, Wolff, Dähn, Peterson, Schwarze, Thilo, Watson, Kamps, Th. Müller, Beekmann, Neuser, Mundlos, Rosen, Spreng, Boos, Tholen, Hoffmann, Locher, Bach-Graef, Hausmann, Moeslin, G. Meister, H. Meister, Wübbels, Pumplün, Habetha, Flach

Anorganische Chemie: Schmidt

Organische Chemie: Hünig